

Matematika I, opak. – 1.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Cvičiaca: RNDr. Z. Gibová, PhD. (zuzana.gibova@tuke.sk)

Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č.k.: 614

Konzultácie: v pondelok 14:00 – 15:00, v iný deň po dohode

- cvičenia (povinné),
- prednášky (link na stránke KMTI – Výučba – aktuálne predmety – Matematika I)
- Predmet končí KZ: 2 zápočtové písomky – získať v súčte **aspoň 51 bodov**
1ZP - 8. týždeň na cvičení za 45 b (30 b + 15 b za teóriu),
2ZP – počas skúškového obdobia za 55 b (40 b +15 b za teóriu),

Bonusové body – max 5 bodov, malé písomky na každom cvičení

Literatúra k cvičeniam

- Baculíková, Grinčová: MATEMATIKA I v príkladoch, Elfa, Košice, 2009
- Baculíková, Grinčová: MATEMATIKA I - Vzorové neriešené úlohy (2013)

Všetky informácie k predmetu na

<https://kmti.fei.tuke.sk/pedagog/rndr-zuzana-gibova-phd>

Zopakujte si:

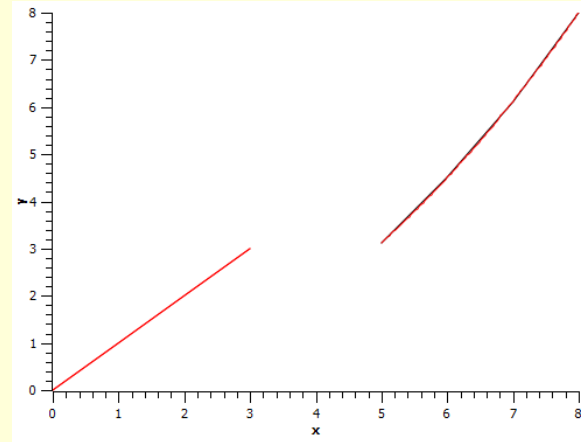
Funkcia je predpis, ktorý každému $x \in A$ priradí **práve jeden prvok** $f(x) \in B$.

Definičný obor funkcie na obrázku je

a) $(3,5)$,

→ b) $(0, 3) \cup (5, \infty)$

c) $(0, \infty)$



Funkciu f nazývame zhora ohraničenou na množine $M \subset D(f)$, ak je zhora ohraničená množina **jej funkčných hodnôt** $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$.

Funkcia f sa nazýva **párna**, ak platí 1. pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$,
2. $f(x) = f(-x)$, pre všetky $x \in D(f)$.

Graf nepárnej funkcie je symetrický podľa **počiatku súradnicového systému**.

Nech $f : A \rightarrow B$. Ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí **$f(x_1) \neq f(x_2)$** , tak funkciu nazývame prostou.

Funkcia

Definição

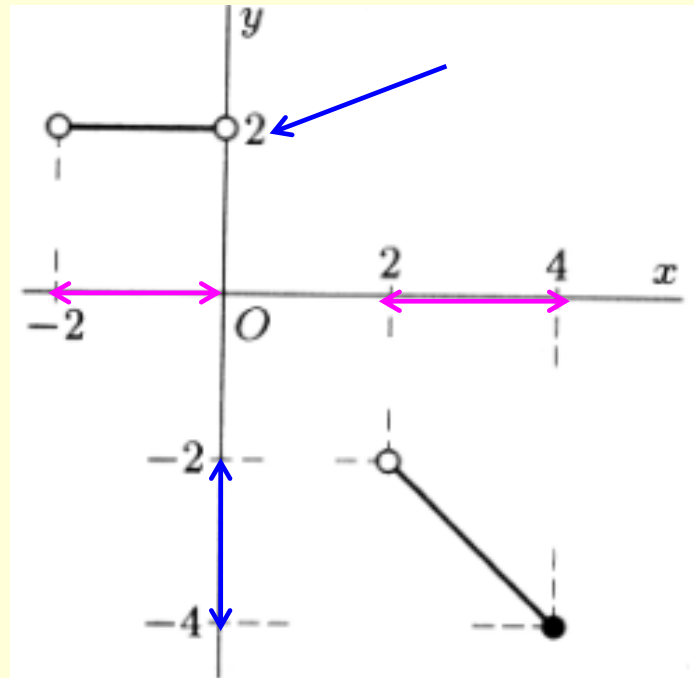
Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú dve neprázdné množiny a f je pravidlo (predpis), ktoré každému $x \in A$ priraduje práve jeden prvok $f(x) \in B$. Potom hovoríme, že f je funkcia, ktorá zobrazuje množinu A do množiny B .

Píšeme

$$f : A \rightarrow B$$

- definičný obor funkcie $f: D(f) = A$ (x súradnice danej funkcie)
- obor hodnôt funkcie $f: H(f) = \{f(x) : x \in A\}$ (y súradnice danej funkcie)
- graf funkcie $f: G(f) = \{[x, f(x)] \in A \times B, x \in A\}$

$\underset{= y}{\circlearrowleft}$



$D(f) = (-2, 0) \cup (2, 4)$ *pozeráme na os x*
 $H(f) = \langle -4, -2 \rangle \cup \{2\}$ *pozeráme na os y*

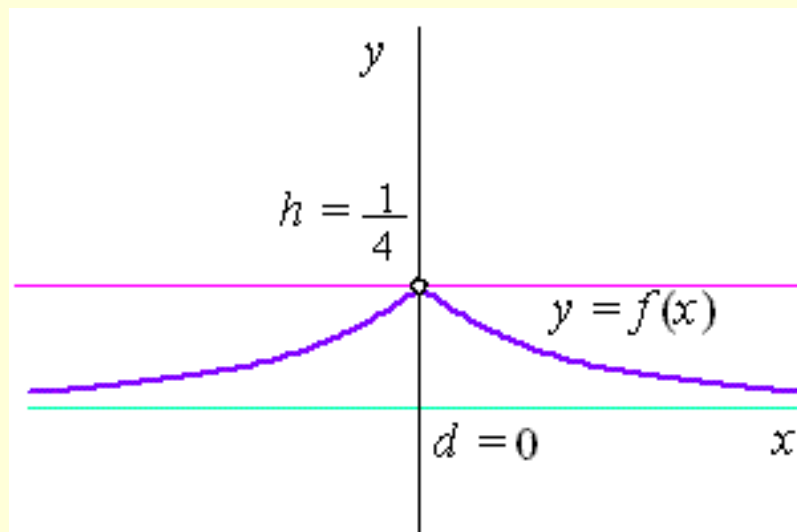
Niektoré vlastnosti funkcie

Definícia

Ohraničené funkcie

Funkciu f nazývame *zhora (zdola) ohraničenou na množine* $M \subset D(f)$, ak je *zhora (zdola) ohraničná množina jej funkčných hodnôt* $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$.

Ak je funkcia f ohraničená zhora aj zdola na množine M , tak hovoríme, že je *ohraničená na množine* M



ohraničená zhora

ohraničená zdola

Niektoré vlastnosti funkcie

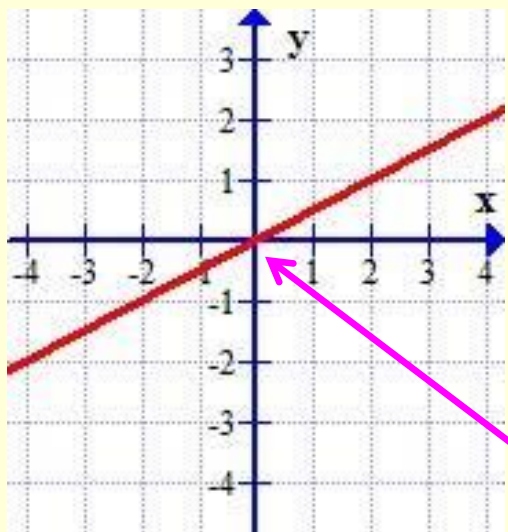
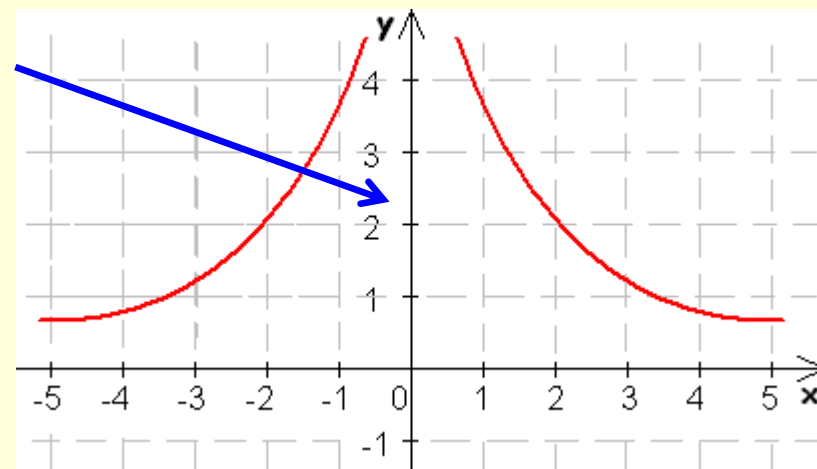
Definícia

Párne a nepárne funkcie

Funkcia f sa nazýva *párna*, resp. *nepárna*, ak platí

1. pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$,
2. $f(x) = f(-x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$ pre všetky $x \in D(f)$.

Graf párnej funkcie je symetrický podľa osi y



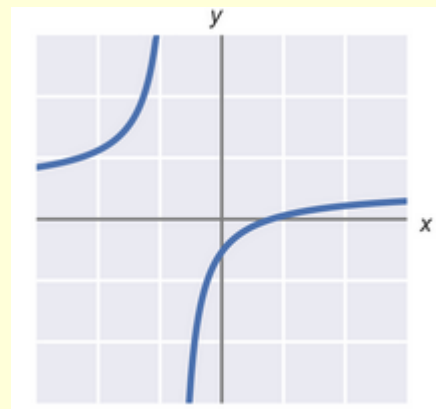
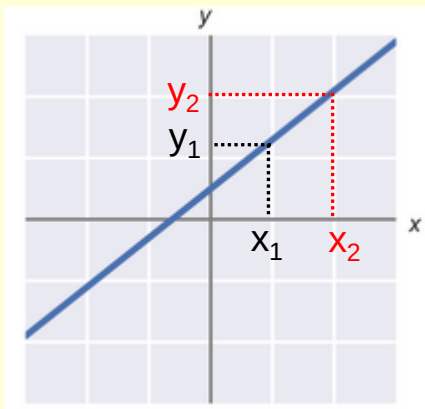
Graf nepárnej funkcie je symetrický podľa počiatku súradnicového systému

Niektoré vlastnosti funkcie

Definícia

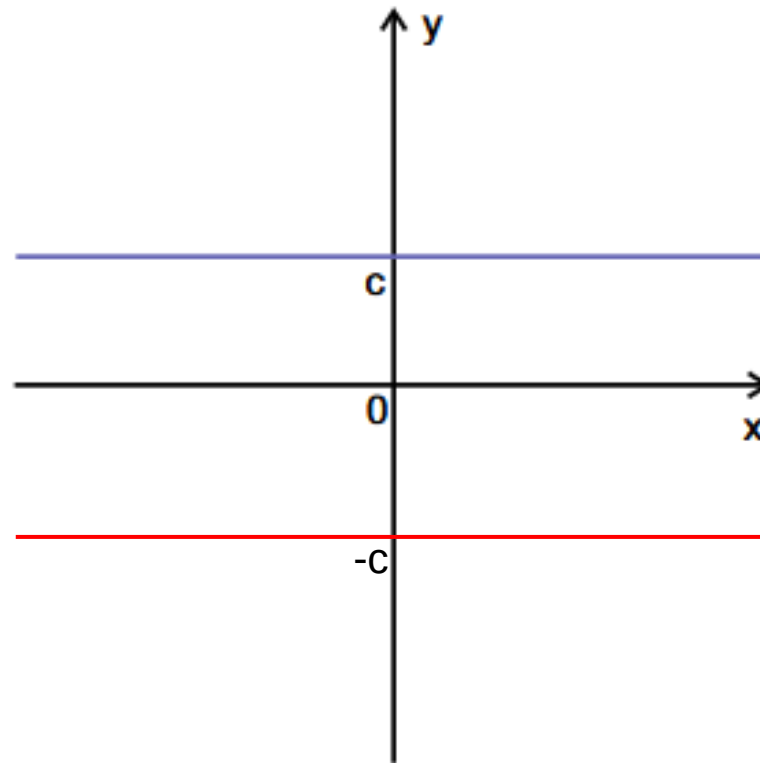
Prostá funkcia

Nech $f : A \rightarrow B$. Ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, tak funkciu nazývame prostou.



Elementárne funkcie

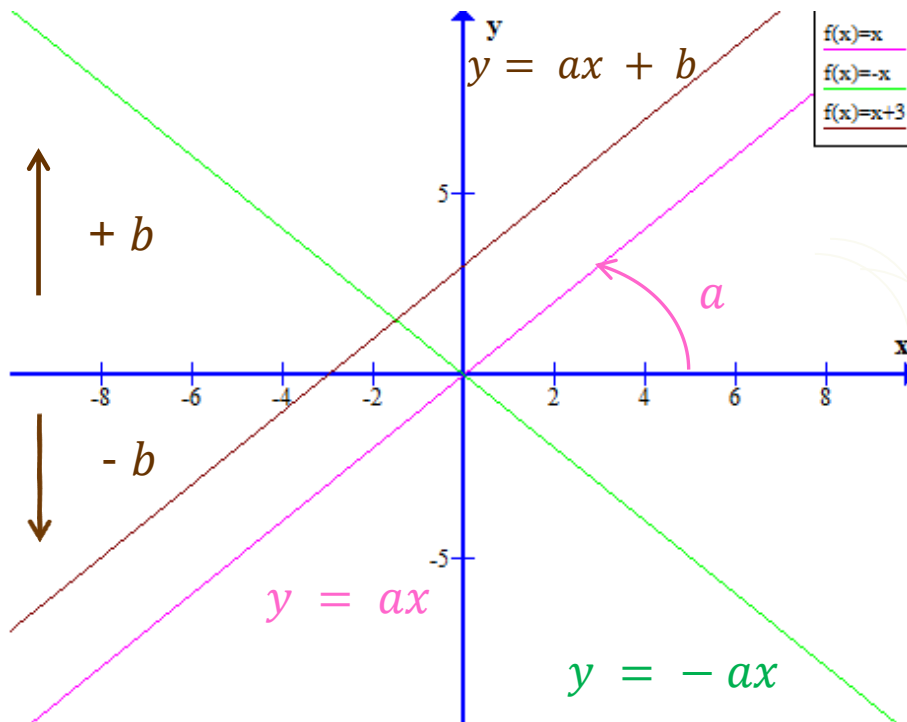
Konštantná funkcia $y = c, c \in \mathbb{R}$



Grafom je priamka rovnobežná s osou x. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Lineárna funkcia $y = ax + b, a \neq 0$



a - ovplyvní sklon priamky
 $-a$ - ovplyvní smer priamky
 b - posun na osi y

$y = ax$ - **nemá** priesečníky P_x, P_y

$y = ax + b$ - **má** priesečníky P_x, P_y

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Pre dve hodnoty x z $D(f)$ vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
3. Viesť zvolenými bodmi priamku.

Grafom je priamka. $D(f) = \mathbb{R}$

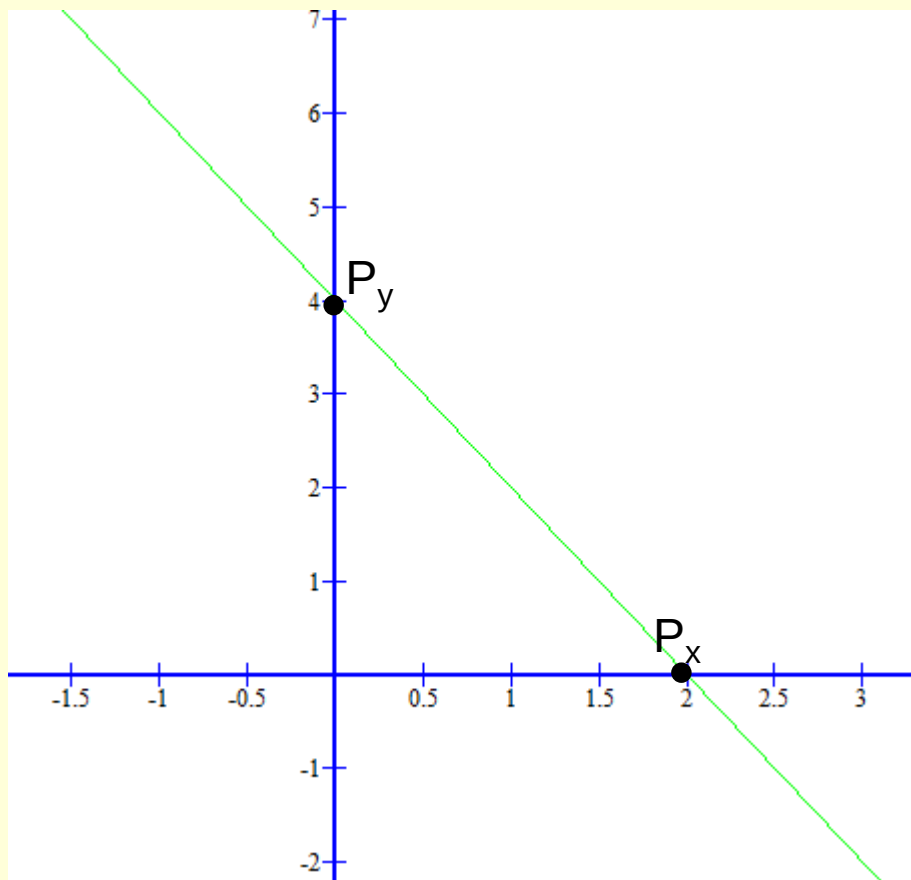
1. Načrtnite grafy funkcií a určte niektoré ich vlastnosti: $D(f)$, $H(f)$, párnosť, nepárnosť, ohraničenosť a či je funkcia prostá

a) $y = -4$

b) $y = 0,5x - 3$

c) $y = -2x + 4$ sami

1. c) $y = -2x + 4$



$$D(f) = \mathbb{R}$$

má priesečníky s osou x a y:

$$P_x : y = 0, \quad 0 = -2x + 4 \\ -4 = -2x \\ x = 2$$

$$P_y : x = 0, \quad y = -2 \cdot 0 + 4 \\ y = 4$$

Poznámka: $a = -2 < 0$,
priamka klesá

$$H(f) = \mathbb{R}$$

nie je ohraničená zhora ani zdola

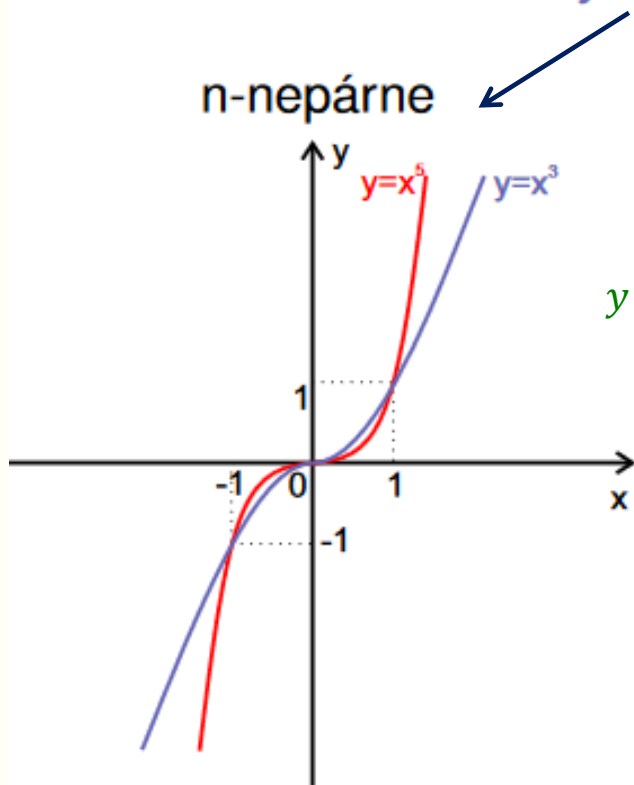
$$x = 2, \quad f(x) = -2 \cdot (2) + 4 = 0, \quad \text{nie je párna: } f(x) \neq f(-x) \\ -x = -2; \quad f(-x) = -2 \cdot (-2) + 4 = 8 \quad \text{nie je nepárna: } f(-x) \neq -f(x)$$

$$x_1 = -2 \neq x_2 = 2 \quad f(x_1) = 0 \neq f(x_2) = 8 \quad \text{je prostá}$$

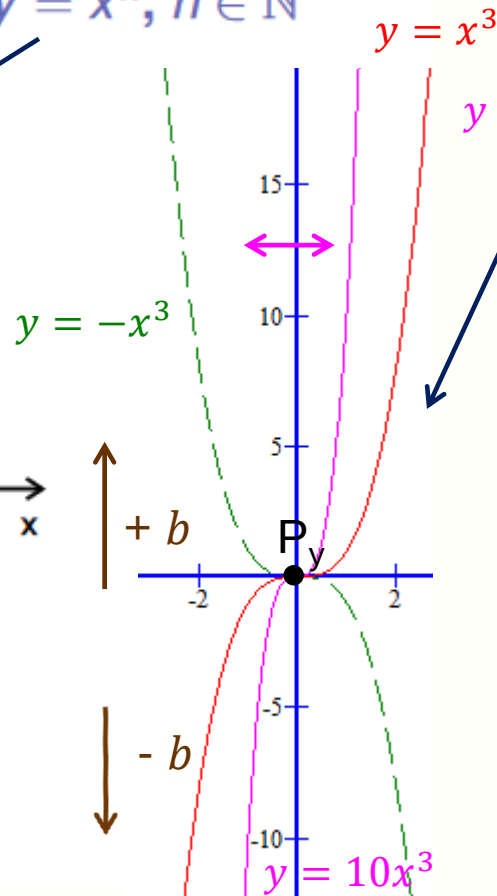
Elementárne funkcie

Mocninová funkcia $y = x^n, n \in \mathbb{N}$

n -nepárne



n – zúženie, rozšírenie



$y = a \cdot x^n$ - má priesečník $P_x = P_y$ - stred

$y = a \cdot x^n + b$ - má priesečníky P_x, P_y

a – zúženie, rozšírenie

$+a$ – orietácia 1. a 3. kvadrant

$-a$ – orietácia 2. a 4. kvadrant

b – posun na osi y

$D(f) = \mathbb{R}$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť priesečníky s osami.
3. Pre dva body z $D(f)$ vypočítame y (alebo pre jeden bod, ak funkcia má P_x).
4. Viešť krivku cez vypočítané body.

2. Načrtnite grafy funkcií a určte niektoré ich vlastnosti: $D(f)$, $H(f)$, párnosť, nepárnosť, ohraničenosť a či je funkcia prostá

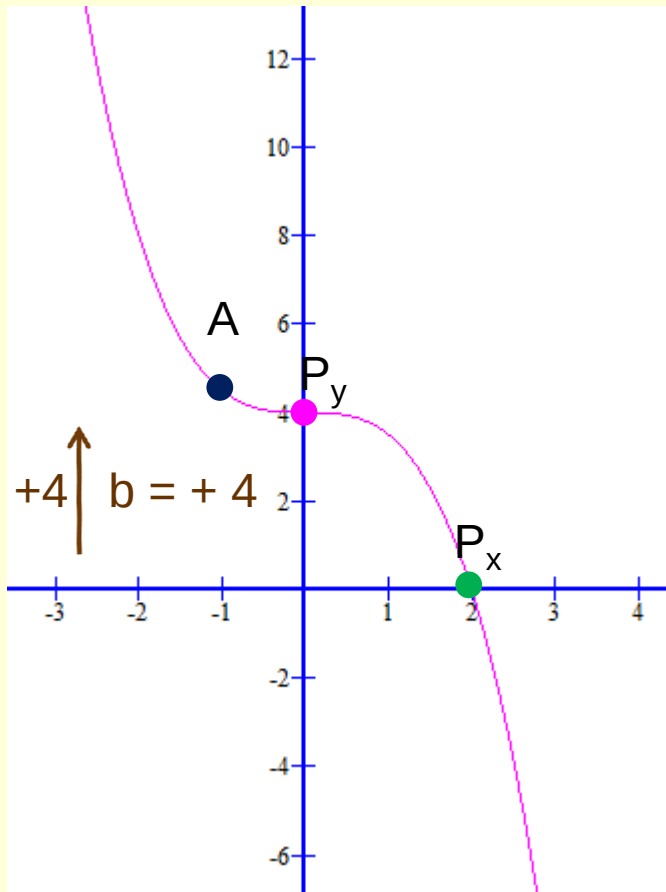
a) $y = x^3 + 1$ $D(f) = \langle -2, 2 \rangle$

b) $y = -x^5$

c) $y = -0,5x^3 + 4$, sami

2. c) $y = -0,5x^3 + 4$,

$D(f) = \mathbb{R}$



priesečník s osou x:

$$P_x : y = 0, \quad 0 = -0,5 \cdot x^3 + 4$$

$$-8 = x^3$$

$$x = 2$$

priesečník s osou y:

$$P_y : x = 0, \quad y = -0,5 \cdot 0 + 4$$

$$y = 4 \quad \text{stred grafu}$$

voľba bodu A:

$$x = -1, \quad y = -0,5 \cdot (-1)^3 + 4$$

$$y = 0,5 + 4$$

$$y = 4,5$$

Poznámka: $a = -0,5 < 0$, *graf klesá*

$H(f) = \mathbb{R}$

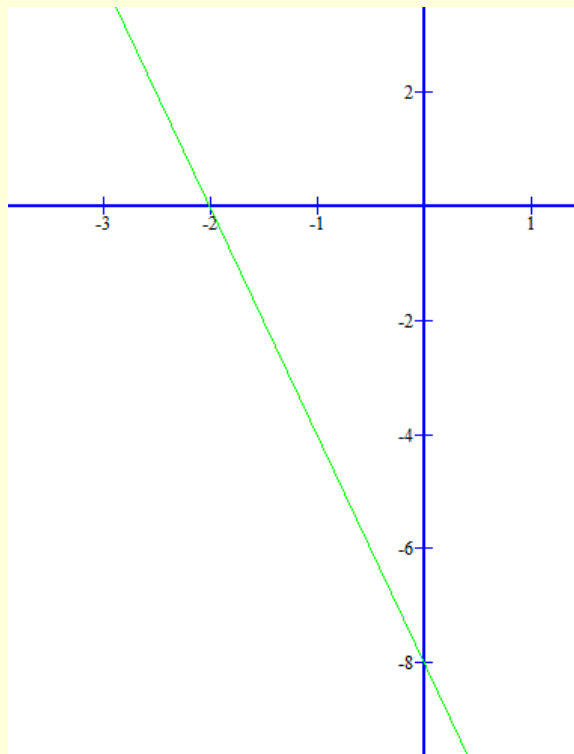
nie je párna, nie je nepárna - graf nie je symetrický podľa osi y ani podľa počiatku

$$x_1 = 2 \neq x_2 = 0 \quad f(x_1) = 0 \neq f(x_2) = 4 \quad \text{je prostá}$$

nie je ohraničená

Kontrolka: Vyberte, ktorý zápis funkcie zodpovedá grafu na obrázku 1.

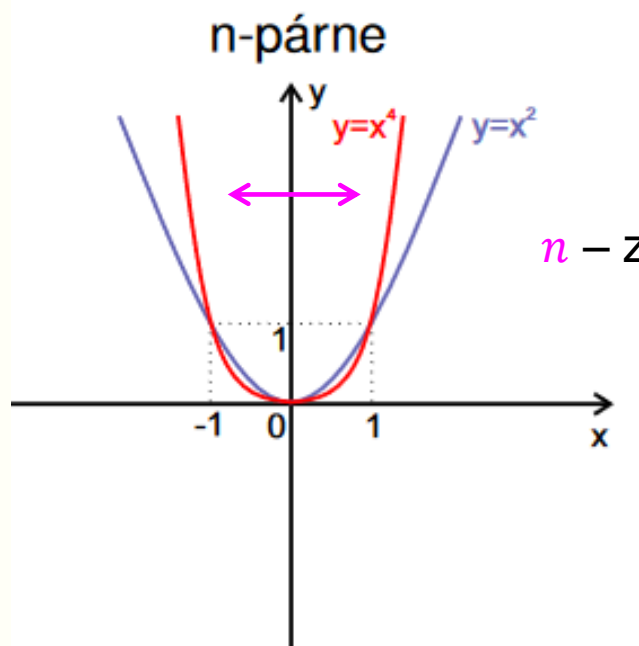
a) $y = -4x - 8$, b) $y = 4x$, c) $y = 8x + 4$, d) $y = 4x - 8$.



obr. 1

Elementárne funkcie

Mocninová funkcia $y = x^n, n \in \mathbb{N}$



n – zúženie, rozšírenie

má priesečník $P_x = P_y$, je vrcholom V paraboly

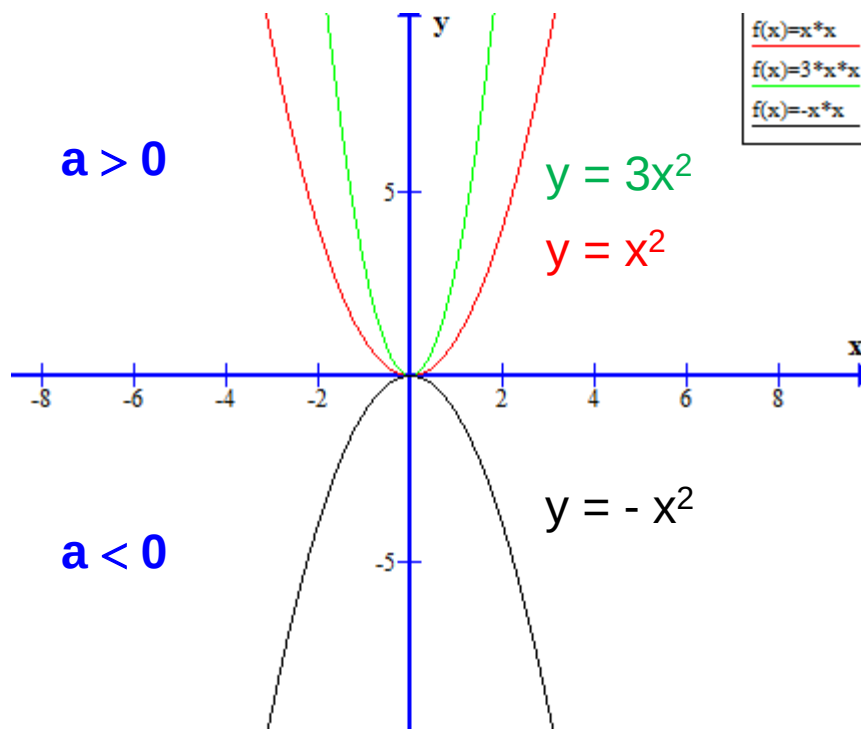
$D(f) = \mathbb{R}$

Grafom je parabola.

Elementárne funkcie

Kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$, $b = c = 0$
 $a \neq 0$

špeciálny prípad mocnínovej funkcie



a - ovplyvní strmosť funkcie
- a - orientácia funkcie

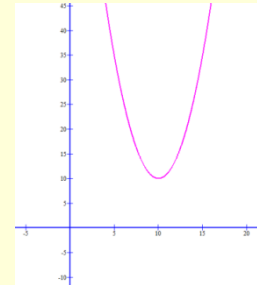
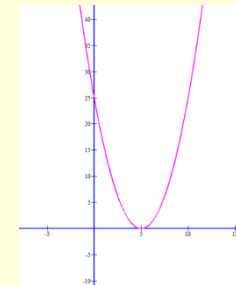
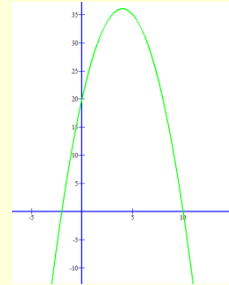
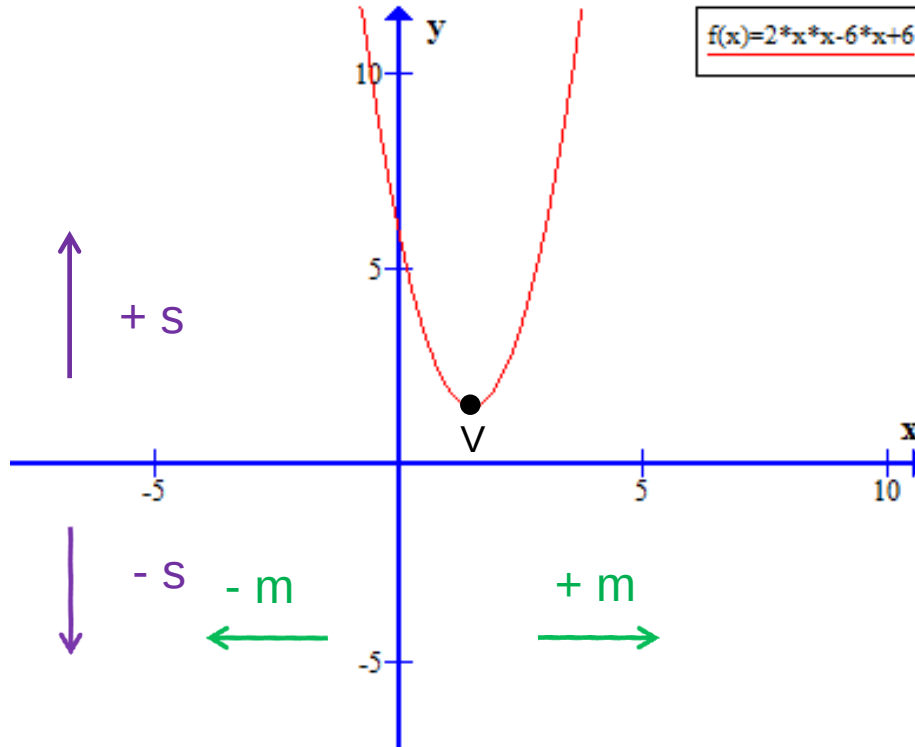
má priesečník $P_x = P_y$, je vrcholom V paraboly

Grafom je parabola. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 6$$



$D > 0$, **dva** priesečníky: x_1, x_2

$D = 0$, **jeden** priesečník: $x_1 = x_2$

$D < 0$, **nemá** priesečníky s osou x

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = a(x - m)^2 + s$$

Vrchol paraboly: $V(m, s)$

m – posun na osi x

s – posun na osi y

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť súradnice vrcholu $V(m, s)$.
3. Vypočítať priesečníky s osou X (zvolíme $y = 0$) pomocou diskriminantu, ak nemá priesečníky zvolíme dva body z $D(f)$ a vypočítame y .
4. Vypočítať priesečník s osou Y (zvolíme $x = 0$).
5. Viesť parabolu cez vrchol a určené priesečníky (body).

Pr. 3: Načrtnite grafy funkcií a určte niektoré ich vlastnosti: $D(f)$, $H(f)$, párnosť, nepárnosť, ohraničenosť a či je funkcia prostá

a) $y = 2x^4$

b) $y = x^2 - 1$

c) $y = (x + 2)^2$

d) $y = 6x - 5 - x^2$

e) $y = x^2 - 4x - 5$ sami

3. e) $y = x^2 - 4x - 5$ $D(f) = \mathbb{R}$

vrchol: úprava doplnením na štvorec

$$y = (x - 2)^2 - 5 - 4$$

$$y = (x - 2)^2 - 9$$

$$V(2, -9)$$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = 0^2 - 4 \cdot 0 - 5$$

$$y = -5 \quad \text{A: } x = 0, y = -5$$

priesečníky s osou x: $y = 0$

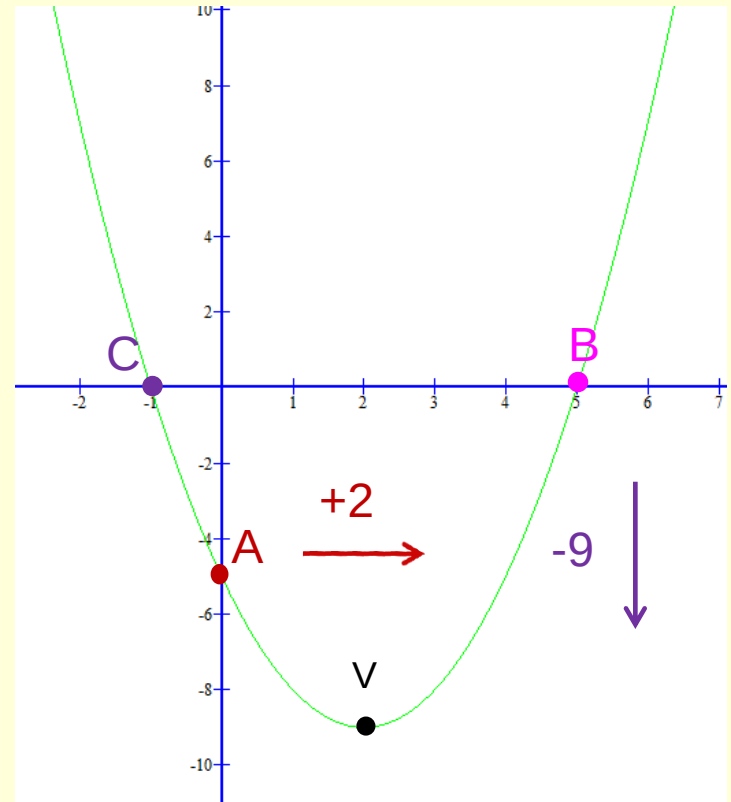
výpočet cez determinant

$$D = 16 + 4 \cdot 5 = 36, \text{ bude mať dva priesečníky}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

$$\text{B: } x_1 = 5, y_1 = 0$$

$$\text{C: } x_2 = -1, y_1 = 0$$



$$H(f) = \langle -9, \infty \rangle$$

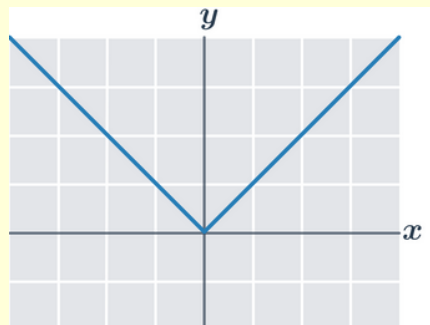
Poznámka: $m = 2$, posun paraboly v smere x
 $s = -9$, posun paraboly nadol v smere y

nie je párna, nie je nepárna - graf nie je symetrický podľa osi y ani podľa počiatku

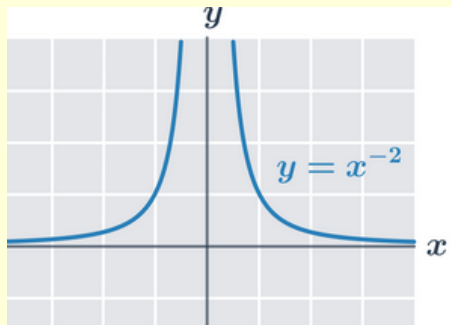
$$x_1 = 5 \neq x_2 = -1 \quad f(x_1) = 0 = f(x_2) = 0 \quad \text{nie je prostá}$$

je ohraničená zdola v bode $f(x) = -9$

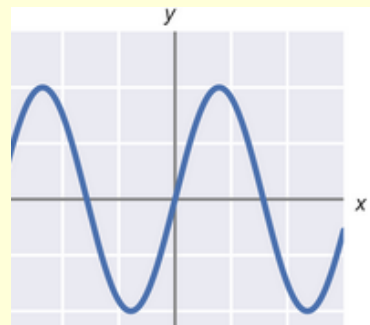
Kontrolka: Rozhodnite, ktorá z daných funkcií a) – d) je ohraničená zhora



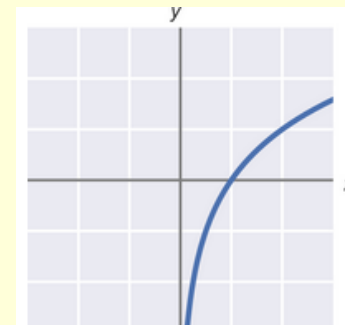
a)



b)



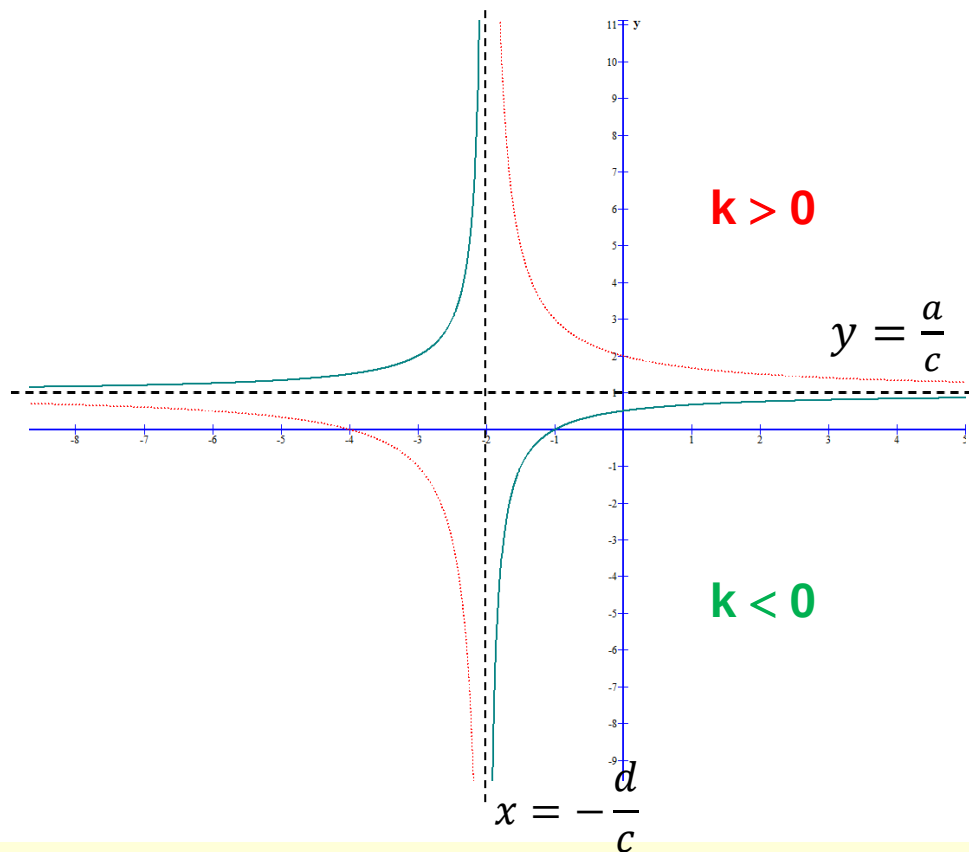
c)



d)

Elementárne funkcie

Lomená funkcia $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $a, b, c, d \in R$



$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \rightarrow y = \frac{k}{x - m} + s$$

Asymptoty:

$$x = m = -\frac{d}{c} \quad \text{posun na osi } x$$

$$y = s = \frac{a}{c} \quad \text{posun na osi } y$$

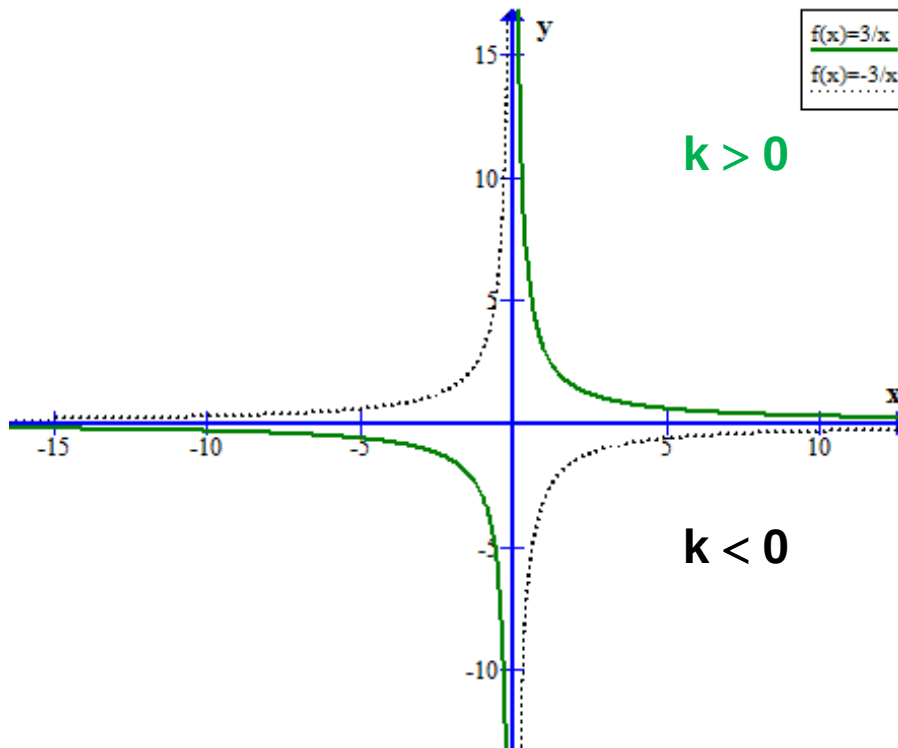
má priesečníky P_x, P_y

Grafom je hyperbola. $D(f) = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

Elementárne funkcie

Lomená funkcia – nepriama úmernosť

$$y = \frac{k}{x} \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$



nemá priesečníky P_x , P_y

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť polohu asymptôt.
3. Vypočítať pre jeden zvolený bod z $D(f)$ jeho y a viesť ním rameno hyperboly.
4. Symetricky viesť druhé rameno hyperboly v protíľahlom kvadrante.

Grafom je hyperbola. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

4. Načrtnite grafy funkcií a určte niektoré ich vlastnosti: $D(f)$, $H(f)$, párnosť, nepárnosť, ohraničenosť a či je funkcia prostá:

a) $y = \frac{-3}{x}$

b) $y = \frac{x+1}{x-1}$

c) $y = \frac{2x}{x+1}$ sami

$$4. c) \quad y = \frac{2x}{x+1}$$

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Asymptoty:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

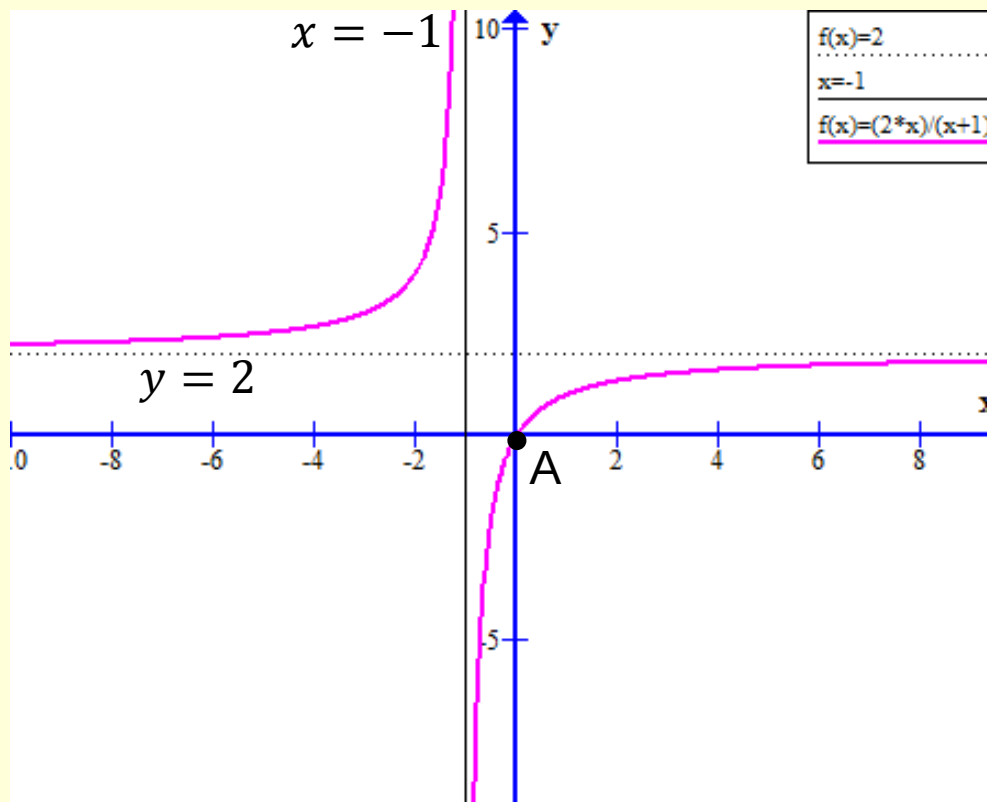
$$A: x = 0, y = \frac{2 \cdot 0}{0+1} = 0$$

$$H(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

nie je párna, nie je nepárna - graf nie je symetrický podľa osi y ani podľa počiatku

$$x_1 = 0 \neq x_2 = 1 \quad f(x_1) = 0 \neq f(x_2) = 1 \quad \text{je prostá}$$

nie je ohraničená



Domáca úloha:

Načrtnite grafy funkcií a určte niektoré ich vlastnosti ($D(f)$, $H(f)$, párnosť, nepárnosť, ohraničenosť a či je funkcia prostá):

1. d) $y = 5, D(f) = \langle -1, 1 \rangle$

e) $y = -3x,$

f) $y = 2x + 6,$

g) $y = 0,25x - 1.$

4. d) $y = \frac{5}{x}$

e) $y = \frac{-2}{x+2}$

2. d) $y = -0,5x^3, D(f) = \langle -1, 1 \rangle$

e) $y = 4x^3 - 4,$

f) $y = x^3 + 8.$

f) $y = \frac{4+x}{x+2}$

3. f) $y = x^2 + 1$

g) $y = x^2 + 4x + 5$

h) $y = -(x + 3)^2$

i) $y = \frac{1}{2}x^2$

j) $y = 9 - x^2$