

NMPaMŠ – 1.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Cvičiaca: RNDr. Z. Gibová, PhD.

zuzana.gibova@tuke.sk

Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č.k.: 614

<https://kmti.fei.tuke.sk/pedagog/rndr-zuzana-gibova-phd>

Konzultácie: štvrtok: 13:15 -14:45

- cvičenia (povinné), prednášky

Prenášajúca: doc. RNDr. Helena Myšková, PhD.

Podmienky zápočtu: 2 zápočtové písomky, získať v súčte **aspoň 16 b z 30 b**

1ZP – 6 .týždeň

2ZP – 11. týždeň

Všetky materiály na stránke KMTI / aktuálne predmety /NMPaMŠ - prednášky

Literatúra k cvičeniam

- Učebnica Daňo, Ostertagová: Numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika v príkladoch – na stránke v prílohách
- Zbierka príkladov – po častiach bude na mojej stránke

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

nelineárna rovnica - $f(x) = 0$; rovnica jednej premennej, obsahuje aj iné členy ako len lineárne

$$\text{napr. } \ln x - x + 3x^2 = 0$$

Iteračný proces – cyklus (opakovanie výpočtov) pri danej metóde

Iterácia – krok, opakovanie výpočtu ($n = 0$ prvá iterácia)

Metódy riešenia – len približné určenie koreňa

a) Metóda polovičného delenia intervalu

b) Metóda prostej iterácie

c) Newtonova metóda

koreň rovnice α , pre ktoré $f(\alpha) = 0$

Pri riešení rovnice je vhodný nasledujúci postup:

1. Určme počet koreňov rovnice pomocou grafického znázornenia (separácie).
2. Pre každý koreň α_i určíme interval $(a_i; b_i)$ taký, že α_i je jediný koreň z tohto intervalu
3. Použijeme približne metódy na výpočet koreňov.
4. a) Ak je dana presnosť ε , proces ukončíme, keď je daná presnosť dosiahnutá.
b) Ak je daný počet iterácií, urobíme odhad absolutnej chyby vypočítaného koreňa.

Grafická separácia na dve funkcie

$$f(x) = x^5 - 6x^2 + 1 = 0$$

Upravíme rovnicu tak, aby sme dostali dve základné funkcie, ktoré vieme graficky zobrazit' – **separácia**:

$$x^5 - 6x^2 + 1 = 0$$

$$x^5 = 6x^2 - 1$$

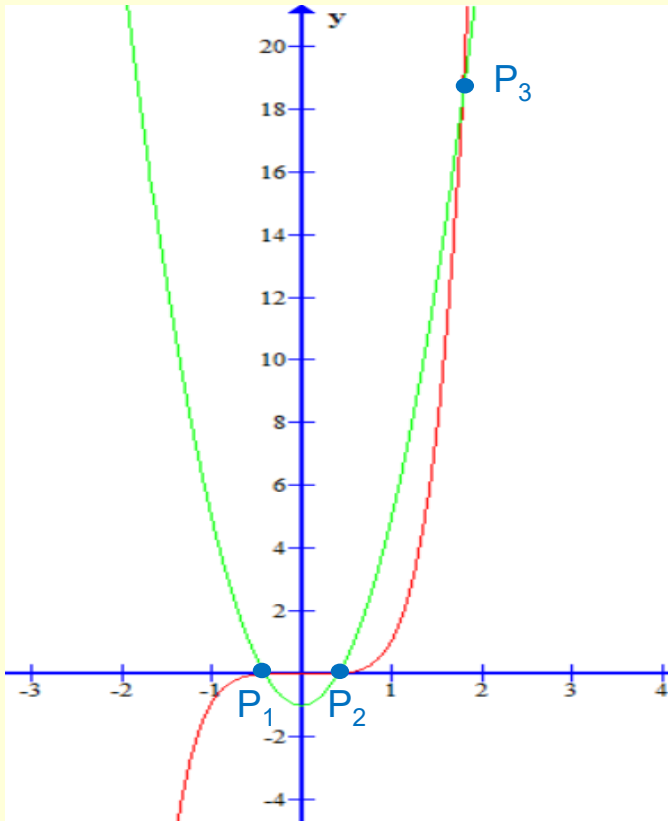
$$h(x) = x^5$$

$$g(x) = 6x^2 - 1$$

Nájdeme priesečníky grafov funkcií, ich x - ové súradnice **predstavujú približné hodnoty koreňov rovnice**

Nájdeme intervaly (polohu) priesečníkov grafov funkcií = **intervaly koreňov** pôvodnej rovnice $f(x) = 0$

funkcia má tri priesečníky P_1, P_2, P_3 na intervaloch:
 $(-1, 0), (0, 1), (1, 2)$



- ak máme určiť záporný reálny koreň, tak volíme interval $(-1, 0)$,
- ak väčší reálny koreň $\rightarrow (1, 2)$
- ak všetky reálne korene $\rightarrow$ všetky intervaly

Pr. 1: Graficky separujte nasledujúce rovnice:

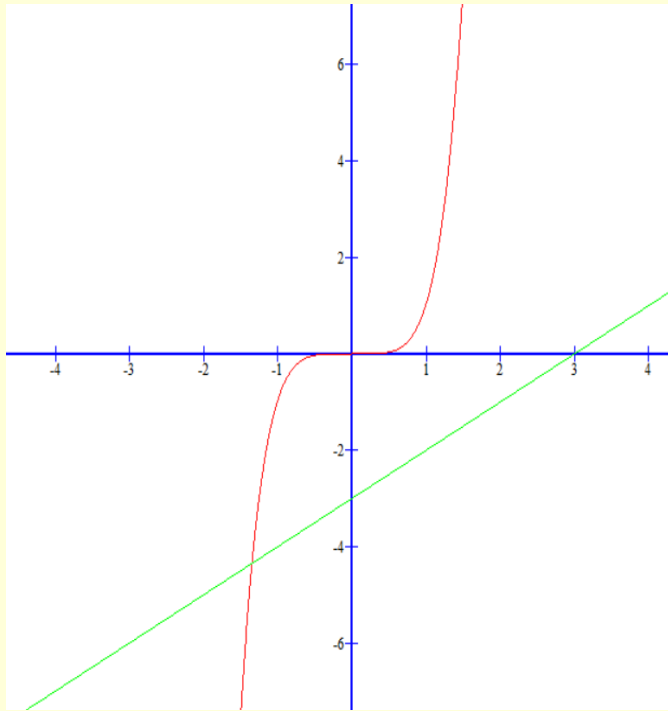
a) $x^5 - x + 3 = 0$,

b) $x^4 - x^3 - 2 = 0$.

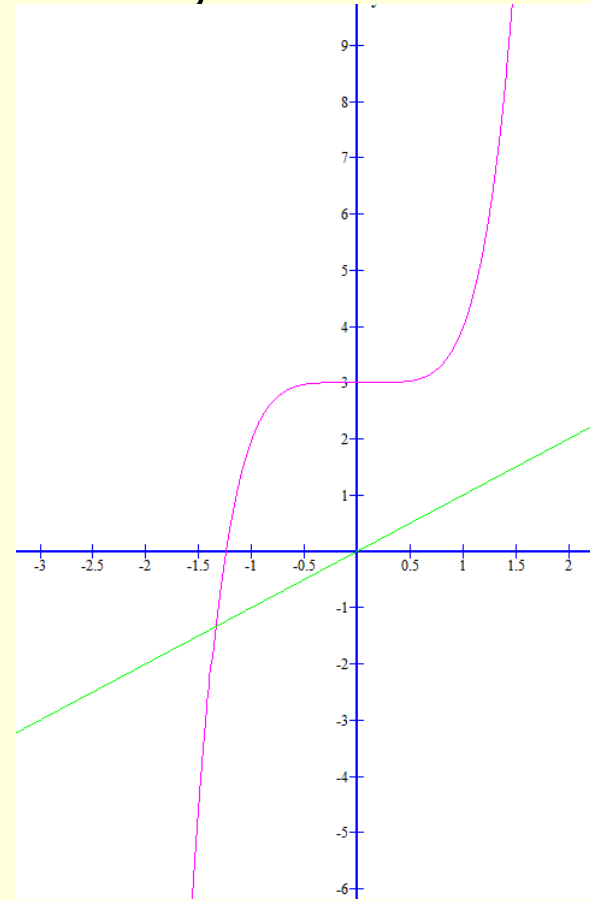
c) $e^x - x^2 + 1 = 0$

d) $x^2 - 4 + x = 0$. Určte všetky ich priesečníky.

a) jeden priesečník, interval $(-2, -1)$



$g(x) = x^5$ $h(x) = x - 3$



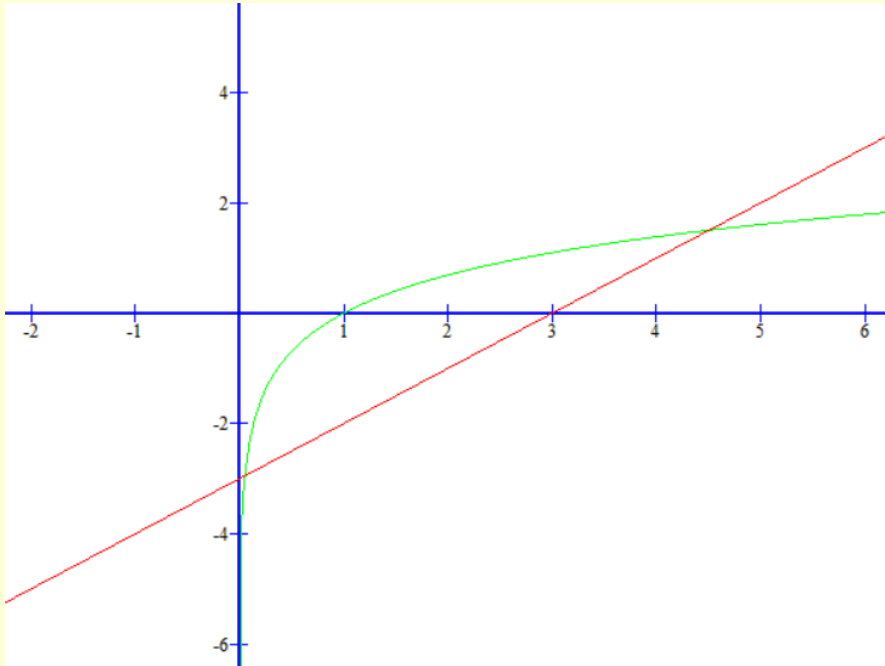
$g(x) = x^5 + 3$ $h(x) = x$

1. Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

Pr. 2: Metódou polovičného delenia intervalu vypočítajte všetky reálne korene rovnice

$$f(x) = \ln x - x + 3 = 0, \text{ s presnosťou } \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}.$$

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa

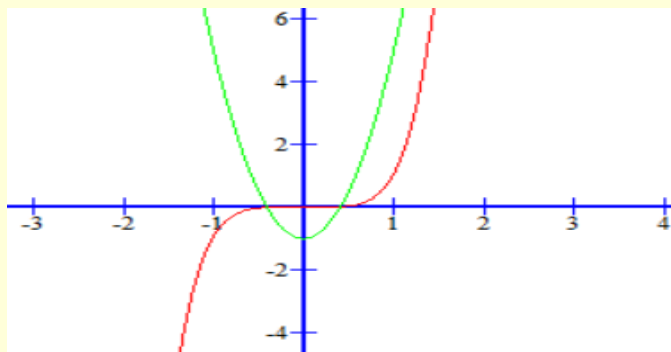


2. Definujeme interval $\langle a, b \rangle$ a overíme, či sa koreň α nachádza v zvolenom intervale

$$\alpha \in \langle a, b \rangle \text{ ak } f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$\alpha \notin \langle a, b \rangle \text{ ak } f(a) \cdot f(b) > 0$$

Poznámka. Rovnica $f(x) = 0$ môže mať v intervale $(a; b)$ nulový bod - koreň aj v prípade, keď $f(a) \cdot f(b) > 0$. V tomto prípade je počet koreňov v intervale $(a; b)$ párny.



Na intervale $(-1, 1)$ má rovnica dva korene:
aj keď $f(-1) \cdot f(1) > 0$

$$f(-1) = (-1)^5 - 6(-1)^2 + 1 = -6$$

$$f(1) = 1 - 6 + 1 = -4$$

a) Menší koreň – volíme interval $\langle 0,01; 0,5 \rangle$, $a = 0,01$, $b = 0,5$

3. Určíme podmienku ukončenia delenia intervalu

$$|b_n - a_n| < 2\varepsilon$$

pomôcka pre určenie iterácie zastavenia

$$\frac{|b-a|}{\varepsilon} < 2^{n+1}$$

4. Určíme počiatočné hodnoty a_n , b_n , c_n

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

5. Urobíme n delení intervalu $\langle a_n, b_n \rangle$ na interval $\langle a_n, c_n \rangle$ alebo $\langle c_n, b_n \rangle$ (píšeme do tabuľky) podľa pravidiel:

$f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$, potom interval $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle$ nahradíme intervalom $\langle a_n, c_n \rangle$
 $f(a_n) \cdot f(c_n) > 0$, potom interval $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle$ nahradíme intervalom $\langle c_n, b_n \rangle$



n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	c_n	$f(c_n)$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$	$ b_n - a_n $
0								
1								
2								
3								

$$f(x) = \ln x - x + 3 \rightarrow f(a_n) = \ln a_n - a_n + 3 \quad |b_n - a_n| < 2\varepsilon$$

6. Delenie ukončíme, ak $|b_n - a_n| < 2\varepsilon$ a súčasne $f(b_n) \cdot f(a_n) < 0$

7. Aproximujeme koreň pomocou c_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.

b) väčší koreň – volíme interval $\langle 4, 5 \rangle$, $a = 4$, $b = 5$

Musí platiť **$f(a) \cdot f(b) < 0$**

$$f(x) = \ln x - x + 3$$

$$f(4) \cdot f(5) < 0 \rightarrow \alpha \in \langle 4, 5 \rangle$$

$$f(4) = \ln 4 - 4 + 3 = 0,39$$

$$f(5) = \ln 5 - 5 + 3 = -0,39$$

$$|b_n - a_n| < 2,5 \cdot 10^{-2} = 0,1$$

$$20 = \frac{|5-4|}{0,05} < 2^{n+1}$$

$$20 < 2^5 \rightarrow n + 1 = 5, n = 4 \text{ (iterácia ukončenia)}$$

$$a_0 = a = 4, b_0 = b = 5, c_0 = \frac{4+5}{2} = 4,5$$

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	c_n	$f(c_n)$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$	$ b_n - a_n $
0	4	+	5	-	4,5	+	+ $\langle c_n, b_n \rangle$	$1 > 0,1$
1	4,5	+	5	-	4,75	-	- $\langle a_n, c_n \rangle$	$0,5 > 0,1$
2	4,5	+	4,75	-	4,625	-	- $\langle a_n, c_n \rangle$	$0,25 > 0,1$
3	4,5	+	4,625	-	4,5625	-	- $\langle a_n, c_n \rangle$	$0,125 > 0,1$
4	4,5	+	4,5625	-	4,53125			$0,0625 < 0,1$

$$|b_4 - a_4| = 0,0625 < 0,1, f(a_4) \cdot f(b_4) < 0$$

$$c_4 = 4,53125, \quad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$$

aproximovaná hodnota c_4 je $\alpha_4 \approx 4,53$, $\alpha_4 \in \langle 4,5, 4,5625 \rangle$

Kontrolka: Ak $f(1) \cdot f(2) < 0$, potom pre koreň nelineárnej rovnice α platí

a) $\alpha \in \langle 0, 2 \rangle$,

b) $\alpha \notin \langle 0, 2 \rangle$,

c) $\alpha \in \langle 1, 2 \rangle$,

d) $\alpha \notin \langle 1, 2 \rangle$.

Dú: 1.1/ 1 – 3, 1.2 / 5 – 8