

Technická univerzita v Košiciach



MATEMATIKA II v príkladoch

pre

Aplikovanú informatiku

Anna Grinčová

Košice 2025

RECENZOVALI: doc. RNDr. Blanka Baculíková, PhD.
doc. RNDr. Miriam Andrejiová, PhD.

1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

© Anna Grinčová

ISBN

OBSAH

Úvod

1 FUNKCIA

1.1	POJEM FUNKCIE	3
1.2	NIEKTORÉ VLASTNOSTI FUNKCIÍ	3
1.3	ZLOŽENÁ FUNKCIA	4
1.4	INVERZNÁ FUNKCIA	5
1.5	ELEMENTÁRNE FUNKCIE	5
1.6	DEFINIČNÝ OBOR FUNKCIE	7

2 LIMITA A SPOJITOSŤ FUNKCIE

2.1	POJEM LIMITA FUNKCIE	11
2.2	VÝPOČET LIMITY FUNKCIE	11
2.3	POJEM SPOJITOSŤ FUNKCIE	13

3 DERIVÁCIA FUNKCIE

3.1	POJEM DERIVÁCIA FUNKCIE A JEJ ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI	14
3.2	VÝPOČET DERIVÁCIE FUNKCIE	15
3.3	GEOMETRICKÝ VÝZNAM DERIVÁCIE	18
3.4	L'HOSPITALOVO PRAVIDLO	19
3.5	TAYLOROV POLYNÓM	22

4 APLIKÁCIE DERIVÁCIE

4.1	MONOTÓNNOSŤ FUNKCIE	25
4.2	LOKÁLNE XTRÉMY FUNKCIE	25
4.3	KONVENOSŤ A KONKÁVNOSŤ FUNKCIE	26
4.4	INFLEXNÝ BOD	26
4.5	VYŠETROVANIE VYBRANÝCH VLASTNOSTÍ FUNKCIE	27

5 NEURČITÝ INTEGRÁL

5.1	PRIMITÍVNA FUNKCIA	35
5.2	INTEGROVANIE ROZKLADOM A ÚPRAVOU	36
5.3	SUBSTITUČNÁ METÓDA	38
5.4	METÓDA PER PARTES	39

6 URČITÝ INTEGRÁL

6.1	DEFINÍCIA URČITÉHO INTEGRÁLU	48
6.2	VLASTNOSTI URČITÉHO INTEGRÁLU	49
6.3	SUBSTITUČNÁ METÓDA	50
5.4	METÓDA PER PARTES	51

7 APLIKÁCIE URČITÉHO INTEGRÁLU

7.1	ELEMENTÁRNA OBLASŤ	53
7.2	GEOMETRICKÉ APLIKÁCIE URČITÉHO INTEGRÁLU	53

	POUŽITÁ LITERATÚRA	59
--	---------------------------	-----------

ÚVOD

Táto učebná pomôcka je určená pre študentov prvého ročníka bakalárskej formy štúdia študijného programu Aplikovaná informatika na Fakulte elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach (FEI TU), ale môže poslúžiť aj študentom iných fakúlt.

Učebnica je rozdelená do siedmich kapitol, ktoré obsahujú základné teoretické poznatky potrebné k riešeniu príkladov, vzorové riešené aj neriešené úlohy k učivu preberanému v predmete Matematika II pre Aplikovanú informatiku.

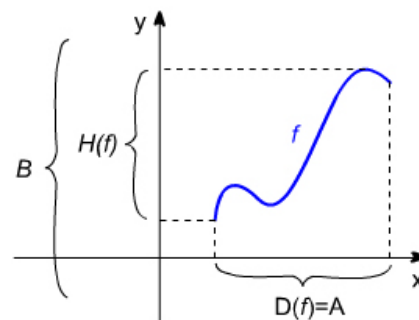
Na záver ďakujem doc. RNDr. Blanke Baculíkovej, CSc. a doc. RNDr. Miriam Andrejiovej, PhD. za starostlivé prečítanie rukopisu a za cenné pripomienky, ktorými prispeli k zlepšeniu textu tejto učebnice.

Autorka

1 FUNKCIA

1.1 Pojem funkcie

Nech $A, B \subset \mathbf{R}$ sú dve neprázdne množiny a f je pravidlo, ktoré každému $x \in A$ priraduje práve jeden prvok $f(x) \in B$. Potom hovoríme, že f **je funkcia (zobrazenie), ktorá zobrazuje množinu A do množiny B** . Píšeme $f: A \rightarrow B$.



Množinu $D(f) = A$ nazývame **definičným oborom funkcie f** .

Číslo $f(x)$ nazývame **hodnotou funkcie f v bode $x \in A$** .

Množinu $H(f) = \{f(x) : x \in A\}$ nazývame **oborom hodnôt funkcie f** .

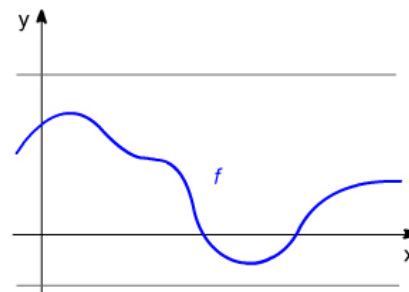
Spôsoby zadania funkcie

Funkcia f je určená, ak je daný jej obor definície $D(f)$ a pravidlo (predpis) podľa ktorého je každému číslu $x \in D(f)$ priradené práve jedno číslo (funkčná hodnota) $f(x)$. Toto pravidlo priradenia môže byť dané rôznymi spôsobmi. Najviac používané spôsoby určenia funkcie sú: analytický (pomocou vzorca), grafický a pomocou tabuľky hodnôt funkcie.

1.2. Niektoré vlastnosti funkcií

Ohraničené funkcie

Funkciu f nazývame **zhora (zdola) ohraničenou** na množine $M \subset D(f)$, ak je zhora (zdola) ohraničená množina jej funkčných hodnôt $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$.



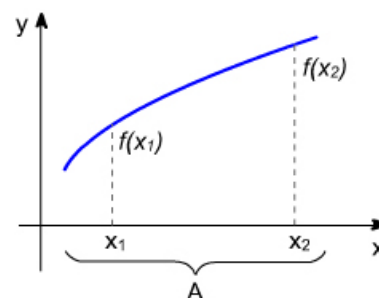
Ak funkcia f je ohraničená zhora aj zdola na množine M , tak hovoríme, že je **ohraničená** na množine M . Ak je $M = D(f)$, nazývame ju ohraničenou.

Ak má množina $f(M)$ **najväčší prvok**, tak toto číslo nazývame najväčšou hodnotou funkcie f na množine M a označujeme $\max_{x \in M} f(x)$.

Ak má množina $f(M)$ **najmenší prvok**, tak toto číslo nazývame najmenšou hodnotou funkcie f na množine M a označujeme $\min_{x \in M} f(x)$.

Monotónne funkcie

Funkciu f nazývame **rastúcou na množine $A \subset D(f)$** , ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.



Funkciu f nazývame **klesajúcou na množine** $A \subset D(f)$, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkciu f nazývame **neklesajúcou na množine** $A \subset D(f)$, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

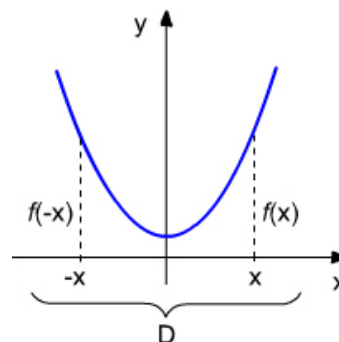
Funkciu f nazývame **nerastúcou na množine** $A \subset D(f)$, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Párne a nepárne funkcie

Funkcia f sa nazýva **párna**, ak platí

1. $\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$,
2. $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D(f)$.

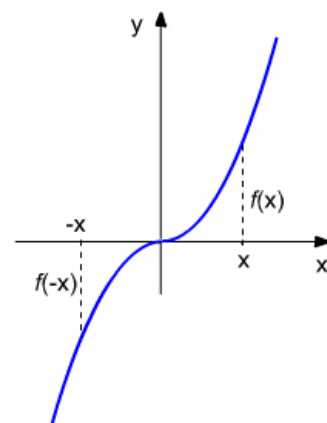
Graf párnej funkcie je súmerný vzhľadom na os y .



Funkcia f sa nazýva **nepárna**, ak platí

1. $\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$,
2. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Graf funkcie nepárnej je súmerný vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy.

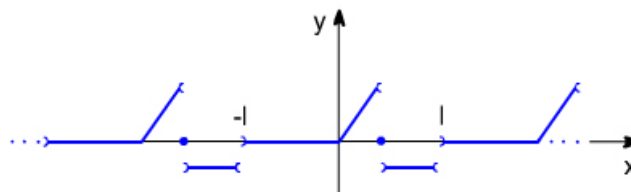


Periodické funkcie

Funkciu f nazývame **periodickou**, ak existuje také reálne číslo $p > 0$, že platí

1. $\forall x \in D(f) \Rightarrow x - p \in D(f), x + p \in D(f)$,
2. $\forall x \in D(f)$ je $f(x + p) = f(x)$.

Najmenšie také číslo p nazývame **periódou funkcie** f .



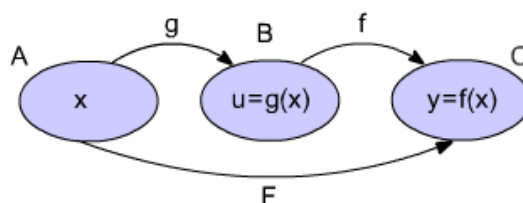
1.3 Zložená funkcia

Funkcia $g : A \rightarrow B$ priradzuje každému prvku $x \in A$ prvok $u = g(x) \in B$.

Funkcia $f : B \rightarrow C$ priradzuje každému prvku $u \in B$ prvok $f(u) \in C$.

Teda každému prvku $x \in A$ je priradený práve jeden prvok $y = f(g(x)) \in C$.

Funkciu $f(g(x))$ nazývame **zloženou funkciou** z funkcie $g : A \rightarrow B$ a $f : B \rightarrow C$ v tomto poradí.



Príklad Nech $g: \langle 1, 2 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 2x - 3 = u$ a $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(u) = 5u^3 + 2u - 3$. Môžeme vytvoriť zloženú funkciu $f(g(x)) = 5(2x - 3)^3 + 2(2x - 3) - 3$.

1.4 Inverzná funkcia

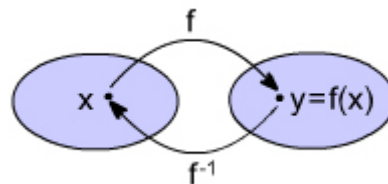
Nech $f: A \rightarrow B$.

Ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, tak funkciu f nazývame **prostým zobrazením**.

Ak $H(f) = B$, hovoríme, že funkcia f je **surjektívnym zobrazením** vzhľadom na B .

Ak funkcia f je injektívna aj surjektívna funkcia vzhľadom na B , tak hovoríme, že funkcia f je **bijektívnym zobrazením vzhľadom na B** .

Nech $f: A \rightarrow B$ je bijekcia. Funkciu $f^{-1}: B \rightarrow A$, $f^{-1}(y) = x$ nazývame **inverznou funkciou** k funkcii $f: A \rightarrow B$ práve vtedy, keď $f(x) = y$.



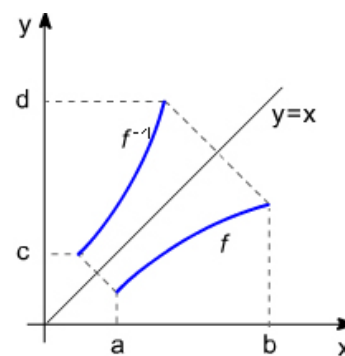
Grafy dvoch navzájom inverzných funkcií f a f^{-1} sú súmerné podľa priamky $y = x$.

Ak funkcia f je na definičnom obore rýdzo monotónna, je zrejme prostá a teda existuje k nej inverzná funkcia f^{-1} . Táto funkcia je tiež rýdzo monotónna (ak funkcia f je rastúca (klesajúca), tak funkcia f^{-1} je tiež rastúca (klesajúca)).

Platí:

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$



1.5 Elementárne funkcie

Konštantná funkcia je daná vzťahom $f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$. Grafom konštantnej funkcie je priamka rovnobežná s osou x , teda $y = c$ na $\mathbf{R}$.

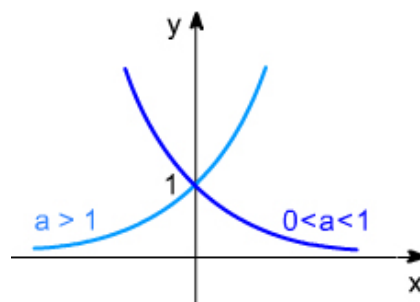
Mocninová funkcia s prirodzeným exponentom $n \in \mathbf{N}$ je daná predpisom $f(x) = x^n$. Je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$. Mocninová funkcia so záporným celým koeficientom $-n, n \in \mathbf{N}$ je daná predpisom $f(x) = x^{-n}$. Je definovaná na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Funkcia n -tá odmocnina ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$) je daná predpisom $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Pre n párne je definovaná na intervale $\langle 0, +\infty \rangle$, pre n nepárne je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$.

Exponenciálna funkcia je daná predpisom $y = a^x$ pre $a > 0, a \neq 1$. Definičný obor je $(-\infty, +\infty)$, obor funkčných hodnôt je interval $(0, +\infty)$.

Pre $a > 1$ je funkcia $y = a^x$ rastúca.

Pre $0 < a < 1$ je funkcia $y = a^x$ klesajúca.



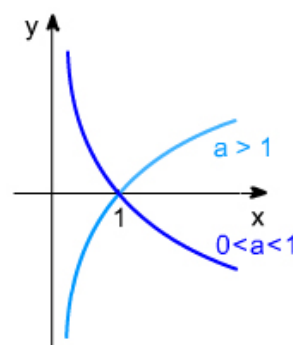
Logaritmická funkcia

Pretože exponenciálna funkcia $y = a^x$ pre $a > 0, a \neq 1$ je rýdzo monotónna na intervale $(-\infty, +\infty)$, existuje k nej inverzná funkcia, ktorá sa nazýva **logaritmická funkcia** so základom a a označujeme ju $y = \log_a x$. Je definovaná na intervale $(0, +\infty)$ a má obor funkčných hodnôt $(-\infty, +\infty)$.

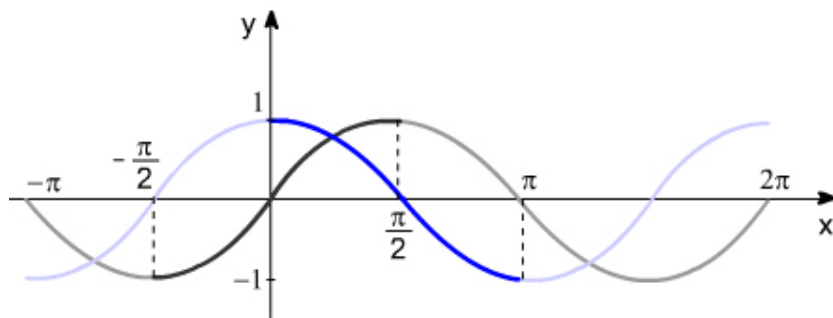
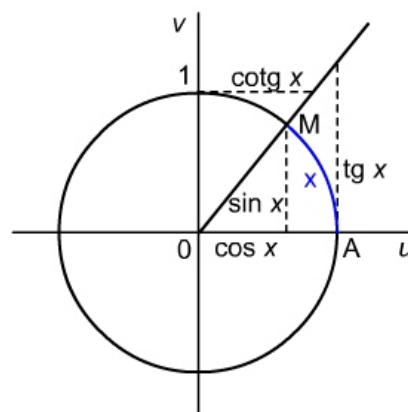
Pre $a > 1$ je funkcia $y = \log_a x$ rastúca.

Pre $0 < a < 1$ je funkcia $y = \log_a x$ klesajúca.

Logaritmus so základom e sa nazýva prirodzený logaritmus a označujeme ho $\ln x$.



Goniometrické funkcie. V rovine $\mathbf{R}^2$ zvolíme súradnicovú sústavu $[O; u, v]$ a uvažujme jednotkovú kružnicu $u^2 + v^2 = 1$. Nech bod M leží na tejto kružnici. Nech x je veľkosť uhla medzi polpriamkou OM s polpriamkou OA v oblúkovej miere. Potom môžeme definovať funkcie $y = \sin x$ (v grafe sivá), resp. $y = \cos x$ (v grafe modrá) ako druhú, resp. prvú súradnicu bodu M (na jednotkovej kružnici).



Funkcie tangens, kotangens definujeme pomocou vzorcov $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Niektoré vlastnosti goniometrických funkcií

- Funkcie $\sin x, \cos x$ sú definované pre každé $x \in \mathbf{R}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pre každé $x \in \mathbf{R}$.
- Funkcia $\sin x$ je nepárna, funkcia $\cos x$ je párna.
- Sínus a kosínus sú periodické funkcie so základnou periódou 2π .
- $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ pre každé $x \in \mathbf{R}$.
- Funkcia $\operatorname{tg} x$ je definovaná pre všetky $x \in \mathbf{R}$, pre ktoré $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

- Funkcia $\cotg x$ je definovaná pre všetky $x \in \mathbf{R}$, pre ktoré $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Číslo π je najmenšia perióda funkcií $\tg x$, $\cotg x$.
- Funkcie $\tg x$, $\cotg x$ sú nepárne.
- Pre každé $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ platí $\tg x \cdot \cotg x = 1$.

1.6 Definičný obor funkcie

Pri hľadaní definičného oboru funkcie je potrebné najčastejšie vziať do úvahy, že:

- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule,
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný,
- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument, ak $a > 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $x \geq 1$, ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $0 < x \leq 1$.

Príklad 1 Nájdime definičný obor funkcie $f: y = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$.

Riešenie: Keďže výraz v menovateli musí byť rôzny od nuly, platí

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0$$

$$(x-2)(x-3) \neq 0$$

$$\underline{x \neq 2} \wedge \underline{x \neq 3}$$

Odtiaľ vyplýva, že $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$ alebo $D(f) = \mathbf{R} - \{2, 3\}$.

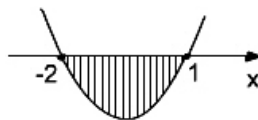
Príklad 2 Nájdime definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{2-x-x^2}$.

Riešenie: Výraz pod druhou odmocninou musí byť nezáporný, potom platí

$$2 - x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$(x+2)(x-1) \leq 0$$



Definičný obor funkcie je $D(f) = \langle -2, 1 \rangle$.

Príklad 3 Nájdime definičný obor funkcie $f: y = \ln(4x-8)$.

Riešenie: Logaritmus je definovaný len pre kladné čísla, preto musí byť

$$4x - 8 > 0$$

$$\underline{x > 2}$$

Definičný obor funkcie je $D(f) = (2, \infty)$.

Príklad 4 Nájdime definičný obor funkcie $f: y = \frac{e^x}{\sqrt{x-2}}$.

Riešenie: Z podmienky, že menovateľ sa nesmie rovnať nule platí

$$\sqrt{x-2} \neq 0$$

a z podmienky, že výraz pod párnou odmocninou môže byť len nezáporný platí

$$x-2 \geq 0.$$

Z obidvoch podmienok vyplýva

$$\underline{\underline{x > 2.}}$$

Definičný obor funkcie je $D(f) = (2, \infty)$.

Príklad 5 Nájdime definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{\log_5(3x+2)}$.

Riešenie: Z podmienok pre výraz pod párnou odmocninou a pre argument logaritmu pri základe $a = 5$ vyplývajú tieto nerovnice

$$\log_5(3x+2) \geq 0 \Leftrightarrow 3x+2 \geq 1$$

$$\underline{\underline{x \geq -\frac{1}{3}}.}$$

Definičný obor funkcie je $D(f) = \left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Príklad 6 Nájdime definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x+2)}$.

Riešenie: Z podmienok pre výraz pod párnou odmocninou a pre argument logaritmu pri základe $a = \frac{1}{2}$ vyplývajú tieto nerovnice

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+2) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < 3x+2 \leq 1$$

Riešime sústavu nerovníc

$$3x+2 > 0 \quad \wedge \quad 3x+2 \leq 1$$

$$\underline{\underline{x > -\frac{2}{3}}} \quad \wedge \quad \underline{\underline{x \leq -\frac{1}{3}}},$$

potom definičný obor funkcie je $D(f) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$.

Príklad 7 Nájdime definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{25-x} - 3 \log \frac{-2}{x}$.

Riešenie: Výraz pod druhou odmocninou musí byť nezáporný a súčasne výraz pod

logaritmom musí byť kladný, teda platí $25 - x \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{-2}{x} > 0$,

$$\underline{\underline{x \leq 25}} \quad \wedge \quad \underline{\underline{x < 0}}$$

prienik týchto intervalov je definičný obor $D(f) = (-\infty, 0)$.

V úlohách 1 – 38 nájdite definičné obory funkcií:

Výsledky:

- | | | |
|-----|---|--|
| 1. | $f : y = \frac{2+x}{x-2}$ | $\mathbf{R} - \{2\}$ |
| 2. | $f : y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ | $\mathbf{R} - \{2, 3\}$ |
| 3. | $f : y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ | $\mathbf{R} - \{1\}$ |
| 4. | $f : y = \sqrt{x+3}$ | $\langle -3, \infty \rangle$ |
| 5. | $f : y = \sqrt{x^2 - x - 2}$ | $(-\infty, -1) \cup \langle 2, \infty \rangle$ |
| 6. | $f : y = \sqrt{2+x-x^2}$ | $\langle -1, 2 \rangle$ |
| 7. | $f : y = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ | $(1, \infty)$ |
| 8. | $f : y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$ | $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$ |
| 9. | $f : y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ | $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ |
| 10. | $f : y = \sqrt{\frac{3}{x-4}}$ | $(4, \infty)$ |
| 11. | $f : y = \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$ | $(-\infty, -4) \cup \langle 3, \infty \rangle$ |
| 12. | $f : y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}}$ | $(-\infty, -2) \cup \langle 1, \infty \rangle$ |
| 13. | $f : y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$ | $(-1, 1) \cup \langle 2, 3 \rangle$ |
| 14. | $f : y = \ln(x-5)$ | $(5, \infty)$ |
| 15. | $f : y = \ln(x^2 + 4x)$ | $(-\infty, -4) \cup (0, \infty)$ |
| 16. | $f : y = \log \frac{1}{x-1}$ | $(1, \infty)$ |
| 17. | $f : y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2}$ | $(2, \infty)$ |

18. $f : y = \log_3 \frac{2}{x^2 - 4x + 4}$ $\mathbf{R} - \{2\}$
19. $f : y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ $(-1,1)$
20. $f : y = \log_4 \sqrt{x^2 - x - 2}$ $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
21. $f : y = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2-x-x^2}$ $(-2,1)$
22. $f : y = \sqrt{\log_2 \frac{3}{x-3}}$ $(3,6)$
23. $f : y = \sqrt{\log_2 \frac{3x}{x-3}}$ $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (3, \infty)$
24. $f : y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 2x + 1)}$ $\langle 0,1 \rangle \cup \langle 1,2 \rangle$
25. $f : y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \frac{2x-1}{5+3x}}$ $(-\infty, -6) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
26. $f : y = e^{\frac{x}{x+1}}$ $\mathbf{R} - \{-1\}$
27. $f : y = 2^{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$ $(-\infty, -3) \cup \langle -2, \infty)$
28. $f : y = 10^{\ln(x-4)}$ $(4, \infty)$
29. $f : y = \frac{2^{4x+2}}{3^{2x+1}}$ $\mathbf{R}$
30. $f : y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \log(2x-3)$ $\left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (2, \infty)$
31. $f : y = \sqrt{x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2x-5}} + \ln(2x-3)$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$
32. $f : y = \sqrt[3]{\frac{x-3}{x+2}} + \sqrt{4-x^2}$ $(-2, 2)$
33. $f : y = \sqrt[3]{\frac{x-3}{x+2}} - 3\log(x^2 + 4x + 4)$ $\mathbf{R} - \{-2\}$
34. $f : y = \log_{12}(2x+6) + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ $(-3, 1) \cup \langle 3, \infty)$
35. $f : y = \frac{\ln x}{x-3} + \sqrt{6x - x^2 - 9}$ $\{ \}$
36. $f : y = \frac{\ln(3x+21)}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ $(-7, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$
37. $f : y = \frac{\ln(3-2x)}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$ $(-\infty, -5) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$
38. $f : y = \frac{\ln x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ $(0, 2) \cup (3, \infty)$

2 LIMITA A SPOJITOSŤ FUNKCIE

2.1 Pojem limita funkcie

Hovoríme, že **funkcia** $f(x)$ **má v čísle** a **limitu** b , ak ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ bodu b existuje také prstencové okolie $O_\delta^\circ(a)$ bodu a , že pre každé $x \in O_\delta^\circ(a)$ platí, že všetky funkčné hodnoty $f(x) \in O_\varepsilon(b)$. Píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Potom

- ak $b \in \mathbb{R}$, hovoríme, že ide o **vlastnú limitu**,
- ak $b \in \{\pm\infty\}$, hovoríme, že ide o **nevlastnú limitu**.

2.2 Výpočet limity funkcie

Ak $a \in \mathbb{R}^+$, pri výpočte limit platí:

- $\infty \pm a = \infty$
- $a \cdot \infty = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$,

ale $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 sú neurčité výrazy, nevieme určiť ich hodnotu.

Pri počítaní limit postupujeme takto:

- zistíme typ neurčitosti (typ limity),
- vhodnou úpravou odstránime neurčitosť,
- dosadením limitu vypočítame.

Príklad 1 Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$.

Riešenie: Po dosadení $x = 2$ do funkcie zistíme, že sa jedná o neurčitosť typu $\frac{0}{0}$, to znamená, že číslo $x = 2$ je koreňom polynómu v čitateli aj v menovateli. V takomto prípade predelíme aj čitateľa aj menovateľa výrazom $(x - 2)$, potom

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-10} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}.$$

Príklad 2 Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^2 + 6x + 2}$.

Riešenie: Počítame limitu neurčitosti typu $\frac{\infty}{\infty}$, kde sa najčastejšie využíva úprava „delenie čitateľa aj menovateľa x -om s najvyššou mocninou menovateľa“.

V tomto prípade je v menovateli najvyššou mocninou x^2 . Preto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^2 + 6x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2 - 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3}.$$

Príklad 3 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^4 + 6x + 2}$.

Riešenie: Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade, ale čitateľa a menovateľa funkcie delíme x^4 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^4 + 6x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^4}}{3 + \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0 - 0}{3 + 0 + 0} = 0.$$

Príklad 4 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 + 10x^2 + 5}{100x^3 - 2}$.

Riešenie: Tak, ako v oboch predchádzajúcich príkladoch, aj tu riešime limitu funkcie s neurčitostou $\frac{\infty}{\infty}$, ale čitateľa a menovateľa funkcie delíme x^3 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 + 10x^2 + 5}{100x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3}}{100 - \frac{2}{x^3}} = \frac{\infty + 0 + 0}{100 - 0} = \infty.$$

V úlohách 1 – 13 vypočítajte limity funkcií:

Výsledky:

- | | | |
|----|--|---------------|
| 1. | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$ | 9 |
| 2. | $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$ | $\frac{3}{4}$ |
| 3. | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ | 4 |
| 4. | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$ | 0 |
| 5. | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 12}$ | -2 |

- | | | |
|-----|--|----------------|
| 6. | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x + 5}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| 7. | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x - 12}$ | $\frac{3}{4}$ |
| 8. | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$ | $-\frac{2}{5}$ |
| 9. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$ | 0 |
| 10. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x}{10x^2 - 3x + 1}$ | ∞ |
| 11. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 12. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$ | -1 |
| 13. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$ | 0 |

2.3 Pojem spojitost' funkcie

Nech $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ a nech $a \in A$. Hovoríme, že **funkcia** $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ **je spojitá v bode** a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Funkcia f je spojitá, ak je spojitá v každom bode definičného oboru.

Nech funkcie $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $g : A \rightarrow \mathbf{R}$ **sú spojité v bode** $a \in A$ a nech $c \in \mathbf{R}$. Potom v bode a sú spojité aj funkcie $f + g$, $f - g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$ a ak je $g(a) \neq 0$, tak aj funkcia $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode a .

3 DERIVÁCIA FUNKCIE

3.1 Pojem derivácie a jej základné vlastnosti

Najprv uvedieme príklady, ktoré viedli k zavedeniu pojmu derivácia funkcie.

Príklad Predpokladajme, že pohyb hmotného bodu je popísaný funkciou $s = f(t)$, kde t je čas a s je dráha, ktorú hmotný bod prejde po priamke od istého zvoleného bodu. Potom

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

je priemerná rýchlosť pohybujúceho sa bodu po priamke v časovom intervale $\langle t_0, t_0 + \Delta t \rangle$. Ak existuje

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = v_0 \in \mathbf{R},$$

tak v_0 je okamžitá rýchlosť pohybujúceho sa bodu v okamihu t_0 .

Príklad Nech $Q(t)$ je veľkosť elektrického náboja, ktorý pretiekol vodičom za časový interval $\langle t_0, t \rangle$, kde t_0 je začiatkový okamih, od ktorého sledujeme prietok elektrického náboja vodičom. Potom podiel

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$$

nazývame priemernou intenzitou elektrického prúdu na intervale $\langle t_0, t \rangle$. Ak existuje

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} \in \mathbf{R},$$

tak toto číslo nazývame okamžitou intenzitou elektrického prúdu v okamihu t_0 .

Vzhľadom na dôležitosť uvedených limit zavádzame pre nich označenie derivácia funkcie v bode.

Hovoríme, že **funkcia** f **má v bode** $x_0 \in D(f)$ **deriváciu**, ak je definovaná v okolí bodu x_0 a existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Túto limitu nazývame deriváciou funkcie f v bode x_0 a označujeme ju $f'(x_0)$.

Pre deriváciu funkcie f v bode x_0 používame aj označenia: $[f(x)]'_{x=x_0}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x=x_0}$.

Poznámka Ak limita v definícii derivácie je vlastná, resp. nevlastná, hovoríme o vlastnej, resp. nevlastnej derivácii. V ďalšom texte pod pojmom "derivácia" budeme rozumieť vlastnú deriváciu.

Dôležitý vzťah medzi deriváciou funkcie a spojitosťou funkcie f v bode x_0 vyjadruje veta:

Ak funkcia f má v bode x_0 deriváciu, tak je v tomto bode spojitá.

Opačné tvrdenie neplatí, teda funkcia spojitá v bode x_0 , nemusí mať v bode x_0 deriváciu.

Zavedieme pojem derivácia funkcie na množine.

Nech $M \subset A$ je množina všetkých bodov, v ktorých má funkcia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ deriváciu. Potom môžeme na množine M definovať funkciu $g : M \rightarrow \mathbf{R}$ vzťahom $g(x) = f'(x)$, $x \in M$.

Funkciu g nazývame deriváciou funkcie f na množine M a označujeme f' alebo $\frac{df}{dx}$.

3.2 Výpočet derivácie funkcie

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú v bode x derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$, nech $c \in \mathbf{R}$. Potom funkcie $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ a ak $g(x) \neq 0$, tak aj funkcia $\frac{f}{g}$ majú derivácie v bode x pre ktoré platí:

- $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$,
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$,
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Základné vzorce pre výpočet derivácie elementárnych funkcií platné na množine, kde derivácie existujú:

$$(c)' = 0, c \in \mathbf{R}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(x^a)' = a x^{a-1}, a \in \mathbf{R}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1, x \in (0, \infty)$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$$

Príklad 1 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = x^5 + x^{\frac{7}{3}} - 2$.

Riešenie:

$$f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} + \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{7}{3}-1} - 0 = 5x^4 + \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = 5x^4 + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}.$$

Príklad 2 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x + 5 \cdot 4^x - \log_2 x$.

Riešenie: Funkciu upravíme na tvar $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + e^x + 5 \cdot 4^x - \log_2 x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} + e^x + 5 \cdot 4^x \cdot \ln 4 - \frac{1}{x \ln 2} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + e^x + 5 \cdot 4^x \cdot \ln 4 - \frac{1}{x \ln 2} = \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + e^x + 5 \cdot 4^x \cdot \ln 4 - \frac{1}{x \ln 2}. \end{aligned}$$

Príklad 3 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = e^x \cdot \sin x$.

Riešenie: Funkcia f je v tvare súčinu

$$f'(x) = (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x).$$

Príklad 4 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

Riešenie: Funkcia f je v tvare podielu

$$f'(x) = \frac{(\cos x)' \cdot x - (\cos x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{(-\sin x) \cdot x - (\cos x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}.$$

Príklad 5 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Riešenie: Funkciu vyjadríme v tvare $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ a potom použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Príklad 6 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \sin^2 x^5$.

Riešenie: Funkciu upravíme na tvar $f(x) = [\sin(x^5)]^2$ a znova použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2[\sin(x^5)]^{2-1} \cdot [\sin(x^5)]' = 2(\sin x^5)(\cos x^5) \cdot (x^5)' = 2(\sin x^5)(\cos x^5) 5x^{5-1} = \\ &= 2(\sin x^5)(\cos x^5) \cdot 5x^4 = 10x^4(\sin x^5)(\cos x^5). \end{aligned}$$

Príklad 7 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \ln \sqrt{(1+2x)^3}$.

Riešenie: Funkciu upravíme na tvar $f(x) = \ln \left[(1+2x)^{\frac{3}{2}} \right]$ a znova použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln \left[(1+2x)^{\frac{3}{2}} \right] \right)' = \frac{1}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left((1+2x)^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{1}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{3}{2} (1+2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+2x)' = \\ &= \frac{1}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{3}{2} (1+2x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{3}{1+2x}. \end{aligned}$$

V úlohách 1 – 16 zderivujte funkciu $f(x)$

Výsledky:

1. $f(x) = x^5 - 7x^2 + 3x - 5$

$$f'(x) = 5x^4 - 14x + 3$$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x^4} + 5^x - \ln x$

$$f'(x) = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} + 5^x \ln 5 - \frac{1}{x}$$

3. $f(x) = (x^3 - x + 1) \cos x$

$$f'(x) = (3x^2 - 1) \cos x - (x^3 - x + 1) \sin x$$

4. $f(x) = 2^x \log_2 x$

$$f'(x) = 2^x \left(\ln 2 \cdot \log_2 x + \frac{1}{x \ln 2} \right)$$

5. $f(x) = x 10^{-x}$

$$f'(x) = 10^{-x} (1 - x \ln 10)$$

6. $f(x) = \frac{\sin x}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{(x-1) \cos x - \sin x}{(x-1)^2}$$

7. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$$

8. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 - 5x + 1}$

$$f'(x) = \frac{15 - 2x - 10x^2}{(x^2 - 5x + 1)^2}$$

9. $f(x) = \ln \sin 2x$

$$f'(x) = 2 \cotg 2x$$

10. $f(x) = \ln \frac{5+4x}{3+7x}$ $f'(x) = \frac{-23}{(3+7x)(5+4x)}$
11. $f(x) = \sqrt{1+2 \operatorname{tg} x}$ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1+2 \operatorname{tg} x}}$
12. $f(x) = \sqrt{\sin \frac{2x}{3}}$ $f'(x) = \frac{\cos \frac{2x}{3}}{3 \sqrt{\sin \frac{2x}{3}}}$
13. $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + x + \operatorname{tg} x$ $f'(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$
14. $f(x) = \sin \sqrt{1+x^2} + \sin(\sin x)$ $f'(x) = \frac{x \cos \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \cos x \cdot \cos(\sin x)$
15. $f(x) = \ln^4 \sin x + \ln(x^2 - 2x)$ $f'(x) = 4 \ln^3 \sin x \cdot \cotg x + \frac{2x-2}{x^2-2x}$
16. $f(x) = \sqrt[3]{\ln \sin \frac{x}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\cotg \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{\ln^2 \sin \frac{x}{2}}}$

3.3 Geometrický význam derivácie

- Derivácia $f'(x_0)$ funkcie je smernica k_t dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v dotykovom bode $T[x_0, y_0]$, čiže $f'(x_0) = k_t$.
- Rovnica dotyčnice je $t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Príklad 1 Nájdime rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = x^2 + 1$ v bode $T = [1, ?]$.

Riešenie: Najprv vypočítame y -ovú súradnicu dotykového bodu T . Keďže bod T je dotykový, leží teda na parabole danej funkciou $f(x) = x^2 + 1$, y -ová súradnica je vlastne funkčná hodnota $f(1) = 2$.

Bod $T = [1, 2]$.

Do rovnice dotyčnice potrebujeme dosadiť aj smernicu, čiže $f'(x_0) = f'(1) = [2x]_{x_0=1} = 2$.

Rovnica dotyčnice t :

$$\begin{aligned} y - 2 &= 2(x - 1) \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

V úlohách 1 – 10 nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v dotykovom bode $T[x_0, y_0]$.

Výsledky:

1.	$f(x) = x^3 - 2x$	$T[1, ?]$	$t : x - y - 2 = 0$
2.	$f(x) = x^2 - 7x + 4$	$T[1, ?]$	$t : 5x + y - 3 = 0$
3.	$f(x) = x^3 + 9x + 2$	$T[0, ?]$	$t : 9x - y + 2 = 0$
4.	$f(x) = \sqrt{x^3}$	$T[1, ?]$	$t : 3x - 2y - 1 = 0$
5.	$f(x) = \sqrt{2x}$	$T\left[\frac{1}{2}, ?\right]$	$t : 2x - 2y + 1 = 0$
6.	$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$	$T[0, ?]$	$t : 2x - y + 1 = 0$
7.	$f(x) = 2x \ln x$	$T[1, ?]$	$t : 2x - y - 2 = 0$
8.	$f(x) = \frac{\ln x}{x}$	$T[1, ?]$	$t : x - y - 1 = 0$
9.	$f(x) = \frac{e^x}{2} + 1$	$T[0, ?]$	$t : x - 2y + 3 = 0$
10.	$f(x) = 2\sqrt{2} \sin x$	$T\left[\frac{\pi}{4}, ?\right]$	$t : 4x - 2y + 4 - \pi = 0$

3.4 L'Hospitalovo pravidlo

Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ a nech existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje aj $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- Pre výpočet limit s neurčitost'ou $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$ použijeme uvedené pravidlo priamo.
- Pri neurčitostiach ostatných typov $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ je potrebné funkciu upraviť na neurčitosť typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

I. Ak počítame limitu s neurčitosťou $0 \cdot \infty$, čiže počítame $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$, upravíme ju takto:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{alebo} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Dostaneme neurčitosť typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

II. Ak počítame limitu s neurčitosťou $\infty - \infty$, teda počítame $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ a pritom je možná úprava na spoločného menovateľa, po jej použití dostaneme limitu s neurčitosťou $\frac{0}{0}$.

Príklad 1 Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$.

Riešenie: Po dosadení $x = 0$ dostaneme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, takže priamo použijeme L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{1} = 0.$$

Príklad 2 Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$.

Riešenie: V tomto prípade je to neurčitosť typu $\frac{\infty}{\infty}$ a opäť použijeme L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 1)'}{(2x^2 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x + 1}.$$

Teraz po dosadení dostaneme znova neurčitosť typu $\frac{\infty}{\infty}$ a opäť môžeme použiť L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(4x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Príklad 3 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x$.

Riešenie: Počítame s neurčitost'ou typu $0 \cdot (-\infty)$, postupujeme ako v I.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

Príklad 4 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Riešenie: Počítame s neurčitost'ou typu $\infty - \infty$, postupujeme ako v II.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin x - x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \right) = \\ &= \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

V úlohách 1 – 22 pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítajte limity funkcií:

Výsledky:

- | | | |
|-----|---|-----------------------|
| 1. | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$ | 2 |
| 2. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 3. | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ | 1 |
| 4. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2^x}{2^x - 1}$ | $\frac{1}{\ln 2}$ |
| 5. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{x}$ | $\ln 2$ |
| 6. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$ | $-\frac{3}{2}$ |
| 7. | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 8. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$ | 1 |
| 9. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 2x - 1}{\sin 3x}$ | $\frac{2}{3}$ |
| 10. | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \frac{\operatorname{cotg} 5x}{2 \operatorname{cotg} 3x}$ | $\frac{5}{6}$ |

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} \quad \infty$
12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot gx} \quad 0$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad 0$
14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)} \quad \frac{4}{9}$
15. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tg} x} \quad 0$
16. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad \frac{1}{2}$
17. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) \quad -1$
18. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad 0$
19. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x} \right) \quad -\infty$
20. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad \frac{1}{2}$
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad 0$
22. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \quad \infty$

3.5 Taylorov polynóm

Taylorova veta

Nech funkcia f je v istom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 $(n+1)$ -krát diferencovateľná. Potom pre bod $x \in O(x_0)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

$R_n(x)$ je zvyšok a možno ho vyjadriť v Lagrangeovom tvare

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodným vnútorným bodom intervalu J s koncovými bodmi x_0 a x .

Polynóm

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{(k)},$$

sa nazýva **Taylorov polynóm funkcie** f v bode x_0 .

Taylorov polynóm môžeme využiť pri aproximácii (nahradení) funkcií.

Použitím Taylorovej vety pre niektoré elementárne funkcie dostávame:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}.$$

Príklad 1 Napíšme Taylorov polynóm 3. stupňa funkcie $f(x) = \sqrt{x}$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie: Vypočítame prvú až tretiu deriváciu funkcie:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}.$$

$$\text{Teda } f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}, \quad f'''(1) = \frac{3}{8}.$$

Po dosadení dostávame:

$$T_3(x) = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{1}{4} \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{3}{8} \frac{(x-1)^3}{3!} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3.$$

Príklad 2 Napíšme Taylorov polynóm 4. stupňa funkcie $f(x) = \frac{1}{x^3}$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie: Vypočítame prvú až štvrtú deriváciu funkcie:

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4}, \quad f''(x) = \frac{12}{x^5}, \quad f'''(x) = -\frac{60}{x^6}, \quad f^{IV}(x) = \frac{360}{x^7}.$$

$$\text{Teda } f(1) = 1, \quad f'(1) = -3, \quad f''(1) = 12, \quad f'''(1) = -60, \quad f^{IV}(1) = 360.$$

Po dosadení dostávame:

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 - \frac{3}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 - \frac{60}{3!}(x-1)^3 + \frac{360}{4!}(x-1)^4 = \\ &= 1 - 3(x-1) + 6(x-1)^2 - 10(x-1)^3 + 15(x-1)^4. \end{aligned}$$

V úlohách 23 – 25 napíšte Taylorov polynóm n – tého stupňa danej funkcie f v bode x_0 :

Výsledky:

23. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, n = 3, x_0 = 1$

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{4}{81}(x-1)^3$$

24. $f(x) = \frac{1}{x}, n = 4, x_0 = 2$

$$T_4(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4$$

25. $f(x) = \ln x, n = 4, x_0 = 4$

$$T_4(x) = \ln 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}(x-4)^2 + \frac{1}{192}(x-4)^3 - \frac{1}{1024}(x-4)^4$$

4 APLIKÁCIE DERIVÁCIE

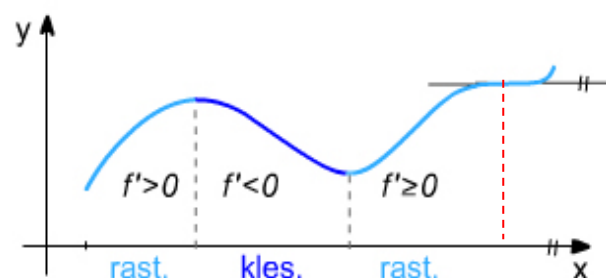
Ak sú funkcie diferencovateľné, tak môžeme pomocou derivácií ľahšie vyšetrovať ich vlastnosti.

4.1 Monotónnosť funkcie

Nech I je otvorený interval.

Nech $\forall x \in I$ existuje derivácia toho istého znamienka. Potom

- ak $f'(x) > 0$, tak f je **rastúca** na I ,
- ak $f'(x) < 0$, tak f je **klesajúca** na I ,
- ak $f'(x) \geq 0$, tak f je **neklesajúca** na I ,
- ak $f'(x) \leq 0$, tak f je **nerastúca** na I .



Na uvedenom obrázku derivácia funkcie je nulová iba v izolovaných bodoch.

4.2 Lokálne extrémny funkcie

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in I$ **lokálne maximum**, ak existuje prstencové okolie $O^0(x_0)$ bodu x_0 také, že pre všetky $x \in O^0(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$.

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in I$ **lokálne minimum**, ak existuje prstencové okolie $O^0(x_0)$ bodu x_0 také, že pre všetky $x \in O^0(x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in I$ **ostré lokálne maximum**, ak existuje prstencové okolie $O^0(x_0)$ bodu x_0 také, že pre všetky $x \in O^0(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$.

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in I$ **ostré lokálne minimum**, ak existuje prstencové okolie $O^0(x_0)$ bodu x_0 také, že pre všetky $x \in O^0(x_0)$ platí $f(x) > f(x_0)$.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie

Nech funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém a nech existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Bod $x_0 \in I$ nazývame **stacionárnym bodom** funkcie f , ak existuje $f'(x_0)$ a platí $f'(x_0) = 0$. Spojitá funkcia môže mať lokálny extrém aj v bode, v ktorom neexistuje derivácia f' .

Poznámka

- Ak f' pri „prechode cez bod x_0 “ nemení znamienko, tak funkcia f nemá v bode x_0 lokálny extrém.
- Ak f' mení znamienko z + na -, má funkcia v bode x_0 lokálne maximum.
- Ak f' mení znamienko z - na +, má funkcia v bode x_0 lokálne minimum.

4.3 Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Funkcia $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ sa nazýva **konvexná**, na intervale I , ak pre každú trojicu bodov $x_1, x, x_2 \in I$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, alebo leží na tejto priamke.

Funkcia $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ sa nazýva **konkávna** na intervale I , ak pre každú trojicu bodov $x_1, x, x_2 \in I$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ nad priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, alebo leží na tejto priamke.

Funkcia $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ sa nazýva **rýdzo konvexná** na intervale I , ak pre každú trojicu bodov $x_1, x, x_2 \in I$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$.

Funkcia $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ sa nazýva **rýdzo konkávna** na intervale I , ak pre každú trojicu bodov $x_1, x, x_2 \in I$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ nad priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$.

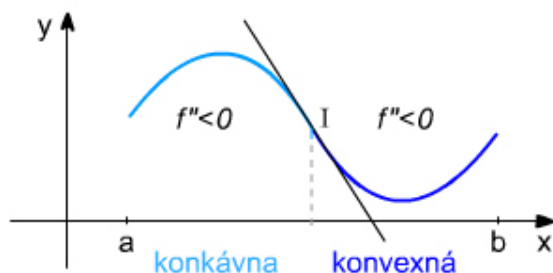
Ak funkcia má druhú deriváciu, tak pri skúmaní konvexnosti, resp. konkávnosti používame vetu:

Nech funkcia f má na intervale I druhú deriváciu, ktorá nemení znamienko. Potom

- ak $f''(x) > 0$, tak je funkcia f na intervale I **rýdzo konvexná**,
- ak $f''(x) < 0$, tak je funkcia f na intervale I **rýdzo konkávna**,
- ak $f''(x) \geq 0$, tak je funkcia f na intervale I **konvexná**,
- ak $f''(x) \leq 0$, tak je funkcia f na intervale I **konkávna**.

4.4 Inflexný bod

Budeme sledovať či sa funkcia pri prechode cez bod $x \in I^0$ „zmení“ z konkávnej na konvexnú, resp. z konvexnej na konkávnu, t. j. či nastáva „ohýbanie“ inflexia grafu funkcie.



Bod $x \in I$ nazývame **inflexným bodom funkcie** f , ak funkcia f je v nejakom ľavom okolí bodu x_0 rýdzo konkávna (rýdzo konvexná) a v nejakom pravom okolí bodu x_0 rýdzo konvexná (rýdzo konkávna).

Nutná podmienka existencie inflexného bodu funkcie

Ak bod x_0 je inflexným bodom funkcie f a existuje $f''(x_0)$, tak $f''(x_0) = 0$.

4.5 Vyšetrovanie vybraných vlastností funkcie

Pri vyšetrovaní **monotónnosti a lokálnych extrémov** funkcie postupujeme takto:

- **A1** nájdeme definičný obor funkcie,
- **A2** vypočítame prvú deriváciu funkcie a na základe toho vyšetríme monotónnosť a lokálne extrém funkcie,
 - o na intervaloch, kde je prvá derivácia kladná, teda $f'(x) > 0$, je funkcia $f(x)$ rastúca ↗
 - o na intervaloch, kde je prvá derivácia záporná, teda $f'(x) < 0$, je funkcia $f(x)$ klesajúca ↘
 - o monotónnosť funkcie sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f'(x) = 0$ alebo v bodoch, v ktorých $f'(x)$ neexistuje,
 - o body, v ktorých $f'(x) = 0$, sa nazývajú stacionárne body (SB),
 - o ak na intervale vľavo od SB funkcia klesá a vpravo rastie, je v tomto SB extrém – lokálne minimum, ↘ SB ↗
 - o ak na intervale vľavo od SB funkcia rastie a vpravo klesá, je v tomto SB extrém – lokálne maximum, ↗ SB ↘
- **A3** stacionárne body a body, v ktorých neexistuje prvá derivácia funkcie rozdelia celý definičný obor na intervaly, na ktorých budeme zisťovať znamienko prvej derivácie funkcie, všetky informácie zaznačíme do tabuľky.

Príklad 1 Vyšetrite monotónnosť a lokálne extrém funkcie $f: y = \frac{x^2}{x-2}$.

Riešenie:

V tomto prípade potrebujeme najprv určiť definičný obor funkcie (bod **A1**).

Funkcia je definovaná pre všetky čísla x , pre ktoré je menovateľ $x - 2 \neq 0$, teda $x \neq 2$.
 Definičný obor funkcie $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Monotónnosť funkcie a lokálne extrém funkcie určíme pomocou prvej derivácie funkcie (bod **A2**).

Prvá derivácia funkcie je

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-2} \right)' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Položíme $y' = 0$ a vypočítame SB.

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Prvá derivácia y' neexistuje v bode nespojitosti prvej derivácie, čiže v bode $x = 2$, ktorý je zároveň aj bodom nespojitosti funkcie $f(x)$.

Body $x = 0$ a $x = 4$ rozdelia celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, kde budeme zisťovať znamienko prvej derivácie a na základe toho určíme monotónnosť a lokálne extrémny funkcie. Získané informácie zapíšeme do tabuľky: (bod A3)

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, \infty)$
y'	+		-	*	-		+
y	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	*	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Funkcia rastie na intervale $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, klesá na intervale $(0, 2) \cup (2, 4)$. V bode $x = 0$ má funkcia lokálne maximum a v bode $x = 4$ má lokálne minimum.

Pri vyšetrovaní **konvexnosti, konkávnosti a inflexných bodov** funkcie postupujeme takto:

- **A1** nájdeme definičný obor funkcie,
- **A4** vypočítame druhú deriváciu funkcie a na základe toho vyšetříme konvexnosť, konkávnosť a inflexné body (IB) funkcie,
 - o na intervaloch, kde $f''(x) > 0$, je funkcia $f(x)$ konvexná $\cup$,
 - o na intervaloch, kde $f''(x) < 0$, je funkcia $f(x)$ konkávna $\cap$,
 - o konvexnosť a konkávnosť funkcie sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f''(x) = 0$ alebo v bodoch, v ktorých $f''(x)$ neexistuje,
 - o body, v ktorých $f''(x) = 0$ a mení sa v nich konvexnosť a konkávnosť sa nazývajú inflexné body (IB)
 - o ak na intervale vľavo od bodu, v ktorom $f''(x) = 0$ je funkcia konvexná a vpravo konkávna, bod nazývame inflexný bod $\cup$ IB $\cap$
 - o ak na intervale vľavo od bodu, v ktorom $f''(x) = 0$ je funkcia konkávna a vpravo konvexná, bod nazývame inflexný bod $\cap$ IB $\cup$
- **A5** inflexné body a body, v ktorých neexistuje druhá derivácia funkcie rozdelia celý definičný obor na intervaly, na ktorých budeme zisťovať znamienko druhej derivácie funkcie, všetky informácie zaznačíme do tabuľky.

Príklad 2 Vyšetříme konvexnosť, konkávnosť a inflexné body funkcie $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Riešenie:

Aj v tomto prípade potrebujeme najprv určiť definičný obor funkcie (bod A1).

Funkcia je definovaná pre všetky čísla x , pre ktoré je menovateľ $(x+1)^2 \neq 0$, teda $x \neq -1$. Definičný obor funkcie $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Konvexnosť, konkávnosť a inflexné body funkcie určíme pomocou druhej derivácie funkcie (bod A4). Druhú deriváciu nájdeme pomocou prvej derivácie.

Prvá derivácia funkcie je

$$y' = \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} \right)' = \frac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot 2(x+1)}{4(x+1)^4} = \frac{x^3 + 3x^2}{2(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Druhá derivácia funkcie je

$$y'' = \left(\frac{x^3 + 3x^2}{2(x+1)^3} \right)' = \frac{(3x^2 + 6x)2(x+1)^3 - (x^3 + 3x^2) \cdot 2 \cdot 3(x+1)^2}{4(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Položíme $y'' = 0$

$$\frac{3x}{(x+1)^4} = 0$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

y'' neexistuje v bode nespojitosti druhej derivácie, čiže v bode $x = -1$, čo je aj bod nespojitosti funkcie $f(x)$.

Bod $x = 0$ rozdelí celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, kde budeme zisťovať znamienko druhej derivácie a na základe toho určíme konvexnosť, konkávnosť funkcie a inflexné body. Získané informácie zapíšeme do tabuľky: (bod A5).

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
y''	-	*	-		+
y	$\cap$		$\cap$	IB	$\cup$

Funkcia je konkávna na intervale $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, konvexná na intervale $(0, \infty)$. Bod $x = 0$ je inflexným bodom funkcie.

V úlohách 1 – 22 určte intervaly rastu, klesania a lokálne extrémny funkcií:

Výsledky:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

rastie $(3/2, \infty)$

klesá $(-\infty, 3/2)$

lok. min. v $x = 3/2$

2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$
 rastie $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
 klesá $(0, 1)$
 lok. min. v $x = 1$
 lok. max. v $x = 0$
3. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$
 rastie $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$
 klesá $(-2, 0)$
 lok. min. v $x = 0$
 lok. max. v $x = -2$
4. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 5$
 rastie $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
 lok. min. neex.
 lok. max. neex.
5. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$
 rastie $(0, 1) \cup (1, \infty)$
 klesá $(-\infty, 0)$
 lok. min. v $x = 0$
6. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100$
 rastie $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
 klesá $(0, 4)$
 lok. min. v $x = 4$
 lok. max. v $x = 0$
7. $f(x) = (x-1)^5$
 rastie $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
 lok. min. neex.
 lok. max. neex.
8. $f(x) = (x^2 - 1)^4$
 rastie $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
 klesá $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 lok. min. v $x = \pm 1$
 lok. max. v $x = 0$
9. $f(x) = (2 - x^2)^2$
 rastie $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$
 klesá $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
 lok. min. v $x = \pm\sqrt{2}$
 lok. max. v $x = 0$
10. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$
 rastie $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
 klesá $(0, 2) \cup (2, 4)$
 lok. min. v $x = 4$
 lok. max. v $x = 0$

11. $f(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$
rastie $(-3, -2) \cup (-2, -1)$
klesá $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$
lok. min. v $x = -3$
lok. max. v $x = -1$
12. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$
rastie $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
klesá $(-1, 0) \cup (0, 1)$
lok. min. v $x = 1$
lok. max. v $x = -1$
13. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
rastie $(\sqrt[3]{1/2}, \infty)$
klesá $(-\infty, 0) \cup (0, \sqrt[3]{1/2})$
lok. min. v $x = \sqrt[3]{1/2}$
14. $f(x) = \frac{10x}{(x+2)^2}$
rastie $(-2, 2)$
klesá $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
lok. max. v $x = 2$
15. $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$
rastie $(0, 1)$
klesá $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
lok. min. v $x = 0$
16. $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$
rastie $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$
klesá $(-3, -1)$
lok. max. v $x = -3$
17. $f(x) = x - \frac{1}{x}$
rastie $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
lok. min. neex.
lok. max. neex.
18. $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x^2}$
rastie $(-\infty, -4/3) \cup (0, \infty)$
klesá $(-4/3, 0)$
lok. max. v $x = -4/3$

19. $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ rastie $(0,2) \cup (2,\infty)$
 klesá $(-\infty,-2) \cup (-2,0)$
 lok. min. v $x = 0$
20. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ rastie $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$
 klesá $(0,1) \cup (1,\infty)$
 lok. max. v $x = 0$
21. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ rastie $(-1,1)$
 klesá $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
 lok. min. v $x = -1$
 lok. max. v $x = 1$
22. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ rastie $(0,\infty)$
 klesá $(-\infty,0)$
 lok. min. v $x = 0$

V úlohách 23 – 43 určte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body funkcií:

Výsledky:

23. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\cup$ na $(-\infty, \infty)$
 IB neex.
24. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ $\cup$ na $(1/2, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, 1/2)$
 IB v $x = 1/2$
25. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ $\cup$ na $(-1, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, -1)$
 IB v $x = -1$
26. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 5$ $\cup$ na $(-1, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, -1)$
 IB v $x = -1$
27. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$ $\cup$ na $(-\infty, 1/3) \cup (1, \infty)$
 $\cap$ na $(1/3, 1)$

28. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100$
 IB $\vee x = 1/3, x = 1$
 $\cup$ na $(3, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$
 IB $\vee x = 3$
29. $f(x) = (x-1)^5$
 $\cup$ na $(1, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, 1)$
 IB $\vee x = 1$
30. $f(x) = (2-x^2)^2$
 $\cup$ na $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$
 $\cap$ na $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
 IB $\vee x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
31. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$
 $\cup$ na $(2, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, 2)$
 IB neex.
32. $f(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$
 $\cup$ na $(-\infty, -2)$
 $\cap$ na $(-2, \infty)$
 IB neex.
33. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$
 $\cup$ na $(0, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, 0)$
 IB neex.
34. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
 $\cup$ na $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$
 $\cap$ na $(-1, 0)$
 IB $\vee x = -1$
35. $f(x) = \frac{10x}{(x+2)^2}$
 $\cup$ na $(4, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, -2) \cup (-2, 4)$
 IB $\vee x = 4$

36. $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ $\cup$ na $(-1/2, 1) \cup (1, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, -1/2)$
 IB $\vee x = -1/2$
37. $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ $\cup$ na $(0, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
 IB $\vee x = 0$
38. $f(x) = x - \frac{1}{x}$ $\cup$ na $(-\infty, 0)$
 $\cap$ na $(0, \infty)$
 IB neex.
39. $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2}$ $\cup$ na $(-\infty, -2)$
 $\cap$ na $(-2, 0) \cup (0, \infty)$
 IB $\vee x = -2$
40. $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$ $\cup$ na $(-2, 2)$
 $\cap$ na $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
 IB neex.
41. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ $\cup$ na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
 $\cap$ na $(-1, 1)$
 IB neex.
42. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ $\cup$ na $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
 $\cap$ na $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
 IB $\vee x = \pm\sqrt{3}$
43. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ $\cup$ na $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$
 $\cap$ na $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, \infty\right)$
 IB $\vee x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

5 NEURČITÝ INTEGRÁL

5.1 Primitívna funkcia

Pri zavedení pojmu derivácie sme uviedli príklad na výpočet okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa hmotného bodu po priamke, ak pohyb hmotného bodu je popísaný funkciou $s = f(t)$. V tejto časti sa budeme zaoberať opačnou úlohou, t.j. hľadaním zákona dráhy pohybu bodu po priamke, ak je daná okamžitá rýchlosť jeho pohybu ako funkcia času.

Príklad Nech okamžitá rýchlosť $v(t)$ pohybujúceho sa bodu po priamke je daná rovnicou $v(t) = 5t - 3$. Ak poloha bodu v okamžiku t je $s(t)$, tak $v(t) = \frac{ds}{dt}$. Hľadáme teda funkciu $s(t)$, pre ktorú platí $\frac{ds}{dt} = 5t - 3$. Túto podmienku spĺňa nekonečne mnoho funkcií $s(t) = \frac{5}{2}t^2 - 3t + C$, kde C je ľubovoľná konštanta.

Funkcia F sa nazýva **primitívna funkcia k funkcii f na intervale I** , ak pre všetky $x \in I$ je $F'(x) = f(x)$.

Nech funkcia F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I a $C \in \mathbb{R}$, potom aj funkcia $G = F + C$ je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale I .

Funkcia $F(x) = \frac{x^2}{2}$ je primitívna k funkcii $f(x) = x$,

$$\text{lebo } \underline{\underline{F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = \underline{\underline{f(x)}}.}}$$

Takisto aj funkcia $F(x) = \frac{x^2}{2} - 6$ je primitívna k funkcii $f(x) = x$,

$$\text{lebo } \underline{\underline{F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 6\right)' = x = \underline{\underline{f(x)}}.}}$$

Poznámka Ak teda k danej funkcii f existuje primitívna funkcia F na intervale I , tak ich existuje nekonečne veľa.

Množinu $\{F + C; C \in \mathbb{R}\}$ všetkých primitívnych funkcií k funkcii f , označujeme symbolom $\int f(x)dx$ nazývame **neurčitý integrál**. Píšeme $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Poznámka Platí $\int f'(x)dx = f(x) + C$, $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$.

Proces hľadania primitívnej funkcie k danej funkcii nazývame **integrovaním** alebo **integráciou funkcie**, argument x nazývame **integračnou premennou**, konštantu C nazývame **integračnou konštantou**.

5.2 Integrovanie rozkladom a úpravou

Nech funkcia f je spojitá na intervale I , potom k nej na intervale I existuje primitívna funkcia F .

Integrovanú funkciu sa snažíme rozložiť na súčet, resp. rozdiel jednoduchších funkcií, pričom využívame známe algebraické vzťahy. Pri integrovaní využívame základné vzorce integrovania.

Veta o lineárnosti

Nech k funkciám f a g existujú primitívne funkcie na intervale I a aspoň jedna z reálnych konštánt k_1, k_2 je rôzna od nuly. Potom existuje primitívna funkcia k funkcii $k_1 \cdot f + k_2 \cdot g$ na intervale I a platí

$$\int [k_1 \cdot f(x) + k_2 \cdot g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx.$$

Niektoré základné vzorce integrovania (vzorce platia na intervaloch, na ktorých sú funkcie definované).

$\int a dx = ax + C$	pre $a \in R$,	$\int \sin x dx = -\cos x + C$,
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	pre $a \in R, a \neq -1$,	$\int \cos x dx = \sin x + C$,
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$,	pre $x \neq 0$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	pre $a > 0, a \neq 1$,	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$,		$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$.

Príklad 3 Vypočítajme $\int (8x^3 + 2e^x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^4}) dx$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int (8x^3 + 2e^x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^4}) dx &= 8 \int x^3 dx + 2 \int e^x dx - 3 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int x^{-4} dx = \\ &= 8 \frac{x^4}{4} + 2e^x - 3 \ln|x| + 2 \frac{x^{-3}}{-3} + C = 2x^4 + 2e^x - 3 \ln|x| - \frac{2}{3x^3} + C. \end{aligned}$$

Príklad 4 Vypočítajte $\int \sqrt{x}(x + \sqrt{x}) dx$

Riešenie:

Integračnú funkciu roznásobíme a upravíme

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x}(x + \sqrt{x}) dx &= \int x^{\frac{1}{2}}(x + x^{\frac{3}{2}}) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}x^1 + x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^2) dx = \\ &= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Príklad 5 Vypočítajte $\int \frac{x^2 + x + 5}{x} dx$.

Riešenie:

Integračnú funkciu rozdelíme na jednoduchšie zlomky a upravíme

$$\int \frac{x^2 + x + 5}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{5}{x} \right) dx = \int \left(x + 1 + 5\frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 5\ln|x| + C.$$

Príklad 6 Vypočítajte $\int (3x - 2)^2 dx$.

Riešenie:

Integračnú funkciu umocníme a upravíme

$$\int (3x - 2)^2 dx = \int (9x^2 - 12x + 4) dx = 9\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 4x + C = 3x^3 - 6x^2 + 4x + C.$$

Príklad 7 Vypočítajte $\int \frac{3x^2}{x^3 + 7} dx$.

Riešenie:

Všimnime si, že integračná funkcia má v čitateli výraz, ktorý je deriváciou funkcie z menovateľa. Preto s využitím vzorca $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ je

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 7} dx = \ln|x^3 + 7| + C.$$

Príklad 8 Vypočítajte $\int \frac{(2^x + 3^x)^2}{6^x} dx$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2^x + 3^x)^2}{6^x} dx &= \int \left[\left(\frac{2}{3} \right)^x + 2 + \left(\frac{3}{2} \right)^x \right] dx = \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + 2x + \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^x}{\ln \frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x - \left(\frac{3}{2} \right)^x}{\ln 2 - \ln 3} + 2x + C \end{aligned}$$

5.3 Substitučná metóda

Nech $\varphi: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ má spojitú deriváciu. Nech F je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na (α, β) . Potom funkcia $F[\varphi(x)]$ je primitívna k $f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$ na (a, b) a platí

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x) dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) dt.$$

Príklad 9 Vypočítajte integrál $\int 3x^2 \cdot e^{x^3+3} dx$.

Riešenie: V danom príklade je funkcia $\varphi(x) = x^3 + 3$ a $\varphi'(x) = 3x^2$. Zavedením substitúcie dostávame integrál z jednoduchšej funkcie. Píšeme:

$$\int 3x^2 \cdot e^{x^3+3} dx = \left| \begin{array}{l} x^3 + 3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^3+3} + C.$$

Príklad 10 Vypočítajte integrál $\int 2x(x^2 + 17)^5 dx$.

Riešenie: V danom príklade je funkcia $\varphi(x) = x^2 + 17$ a $\varphi'(x) = 2x$. Zavedením substitúcie dostávame integrál z jednoduchšej funkcie. Píšeme:

$$\int 2x(x^2 + 17)^5 dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + 17 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(x^2 + 17)^6}{6} + C.$$

Príklad 11 Vypočítajte integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^3 + 5}} dx$.

Riešenie: V danom príklade je funkcia $\varphi(x) = 2x^3 + 5$ a $\varphi'(x) = 6x^2$. Zavedením substitúcie dostávame integrál z jednoduchšej funkcie. Píšeme:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^3 + 5}} dx = \left| \begin{array}{l} 2x^3 + 5 = t \\ 6x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{dt}{6} \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{3} \sqrt{t} + C = \frac{1}{3} \sqrt{2x^3 + 5} + C.$$

Príklad 12 Vypočítajte integrál $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin x} \cos x dx$.

Riešenie: V danom príklade je funkcia $\varphi(x) = \ln(\sin x)$ a $\varphi'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Zavedením substitúcie dostávame integrál z jednoduchšej funkcie. Píšeme:

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \ln(\sin x) = t \\ \frac{\cos x}{\sin x} dx = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2(\sin x)}{2} + C.$$

Príklad 13 Vypočítajme integrál $\int x \operatorname{tg}(1-x^2) dx$.

Riešenie: V danom príklade je funkcia $\varphi(x)=1-x^2$ a $\varphi'(x)=-2x$. Zavedením substitúcie dostávame integrál z funkcie $\operatorname{tg} t$, ktorý rozpišeme na podiel $\frac{\sin t}{\cos t}$. Píšeme:

$$\int x \operatorname{tg}(1-x^2) dx = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \operatorname{tg} t dt = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \frac{1}{2} \ln |\cos t| + C = \frac{1}{2} \ln |\cos(1-x^2)| + C.$$

5.4 Metóda per partes

Nech funkcie $u(x)$, $v(x)$ majú spojité derivácie na intervale J .

Potom na intervale J platí $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$.

Pri nasledujúcich typoch integrálov používame metódu per partes s nižšie uvedenou voľbou funkcií $u(x)$ a $v(x)$:

A $\int u(x) \cdot v'(x) dx$

$$\int P_n(x) \cdot e^{kx} dx$$

$$\int P_n(x) \cdot \cos kx dx$$

$$\int P_n(x) \cdot \sin kx dx, k \in \mathbb{Z}$$

B $\int v'(x) \cdot u(x) dx$

$$\int P_n(x) \cdot \ln x dx$$

V prípade **A** polynóm $P_n(x)$ derivujeme, čím sa znižuje jeho stupeň a integrovaná funkcia sa zjednodušuje.

V prípade **B** polynóm $P_n(x)$ integrujeme.

Príklad 14 Vypočítajme integrál $\int (3x-5) \cdot e^x dx$.

Riešenie:

$$\int (3x-5) \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x-5 & v' = e^x \\ u' = 3 & v = e^x \end{array} \right| = (3x-5) \cdot e^x - 3 \int e^x dx = (3x-5) \cdot e^x - 3e^x + C.$$

Príklad 15 Vypočítajme integrál $\int x \cos x dx$.

Riešenie:

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Príklad 16 Vypočítajte integrál $\int (x^2 + 2x + 17) e^x dx$.

Riešenie: V príklade použijeme metódu per partes dvakrát.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x + 17) e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 2x + 17 & v' = e^x \\ u' = 2x + 2 & v = e^x \end{array} \right| = (x^2 + 2x + 17) e^x - \int (2x + 2) e^x dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = 2x + 2 & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{array} \right| = (x^2 + 2x + 17) e^x - (2x + 2) e^x + 2e^x + c = (x^2 + 17) e^x + C. \end{aligned}$$

Príklad 17 Vypočítajte integrál $\int x^5 \ln x dx$ na intervale $(0, \infty)$.

Riešenie:
$$\int x^5 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x^5 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^6}{6} \end{array} \right| = \frac{x^6}{6} \ln x - \int \frac{x^5}{6} dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} + C.$$

V úlohách 1 – 40 vypočítajte neurčité integrály:

Výsledky:

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | $\int (x^2 - 8x + 2) dx$ | $\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 2x + C$ |
| 2. | $\int (16x^3 + 9x^2 - 4x - 1) dx$ | $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + C$ |
| 3. | $\int (5x^5 + 6x^2 - 7x + 12) dx$ | $\frac{5}{6}x^6 + 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x + C$ |
| 4. | $\int (\frac{1}{3}x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{5}) dx$ | $\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{5}x + C$ |
| 5. | $\int (\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x}) dx$ | $-\frac{1}{3x} - \frac{1}{5} \ln x + C$ |
| 6. | $\int (\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{3x^3}) dx$ | $2 \ln x + \frac{3}{x} - \frac{1}{3x^2} + C$ |
| 7. | $\int (\frac{5}{x^6} - \frac{7}{8x^8}) dx$ | $-\frac{1}{x^5} + \frac{1}{8x^7} + C$ |
| 8. | $\int (\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^5}) dx$ | $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^9} + C$ |

9. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$ $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + C$
10. $\int (\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x^2 \cdot \sqrt{x}) dx$ $\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{7}\sqrt{x^7} + C$
11. $\int (\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}) dx$ $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C$
12. $\int (5e^x - \sqrt{3} \cdot x^5 + \frac{3}{1-x^2}) dx$ $5e^x - \frac{\sqrt{3}}{6}x^6 + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$
13. $\int (\sqrt[3]{x} + 3^x - 2x^3) dx$ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{2}x^4 + C$
14. $\int x^2(2x-3) dx$ $\frac{1}{2}x^4 - x^3 + C$
15. $\int x(x+1)(x-2) dx$ $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$
16. $\int (x+3)^2 dx$ $\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + C$
17. $\int (x - \frac{1}{x})^2 dx$ $\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x} + C$
18. $\int (3\sqrt{x} - 2x)^2 dx$ $\frac{9}{2}x^2 - \frac{24}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}x^3 + C$
19. $\int \frac{6-x}{x^2} dx$ $-\frac{6}{x} - \ln|x| + C$
20. $\int \frac{x^5 - 7x^3 + 5}{x^3} dx$ $\frac{1}{3}x^3 - 7x - \frac{5}{2x^2} + C$
21. $\int \frac{(x+1)^2}{x^3} dx$ $\ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$
22. $\int \frac{x^2 - 2x + 6}{\sqrt{x}} dx$ $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 12\sqrt{x} + C$
23. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + x^2 - 2}{x^2} dx$ $-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{\sqrt{x}} + x + \frac{2}{x} + C$

24. $\int \frac{x(\sqrt[3]{x} - x^3 \cdot \sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}} dx$ $\frac{12}{25} \sqrt[12]{x^{25}} - \frac{4}{21} \sqrt[4]{x^{21}} + C$
25. $\int \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx$ $\frac{1}{2} x^2 - x + C$
26. $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} dx$ $\frac{1}{2} x^2 - 3x + C$
27. $\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} dx$ $\frac{1}{2} x^2 + x + C$
28. $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} dx$ $\frac{1}{2} x^2 - 3x + C$
29. $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$ $\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x + C$
30. $\int \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2} dx$ $\frac{1}{3} x^3 + 2x + C$
31. $\int e^x \cdot 2^x dx$ $\frac{e^x \cdot 2^x}{1 + \ln 2} + C$
32. $\int e^x (2 - \frac{e^{-x}}{x}) dx$ $2e^x - \ln|x| + C$
33. $\int \frac{2x}{x^2 - 3} dx$ $\ln|x^2 - 3| + C$
34. $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$ $\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + C$
35. $\int \frac{3x^3}{2 - x^4} dx$ $-\frac{3}{4} \ln|2 - x^4| + C$
36. $\int \frac{e^x}{3 + e^x} dx$ $\ln|3 + e^x| + C$
37. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ $\ln|\ln x| + C$

$$38. \quad \int \frac{1}{x(4 + \ln x)} dx \qquad \ln|4 + \ln x| + C$$

$$39. \quad \int \cotg x \, dx \qquad \ln|\sin x| + C$$

$$40. \quad \int \tg x \, dx \qquad -\ln|\cos x| + C$$

V úlohách 41 – 70 vypočítajte pomocou substitúcií neurčité integrály:

Výsledky:

$$41. \quad \int (x+3)^{20} dx \qquad \frac{1}{21}(x+3)^{21} + C$$

$$42. \quad \int (4x-2)^{13} dx \qquad \frac{1}{56}(4x-2)^{14} + C$$

$$43. \quad \int (1-x)^{-3} dx \qquad \frac{1}{2(1-x)^2} + C$$

$$44. \quad \int \frac{2}{(x+17)^5} dx \qquad -\frac{1}{2(x+17)^4} + C$$

$$45. \quad \int \sqrt{x+7} dx \qquad \frac{2}{3}\sqrt{(x+7)^3} + C$$

$$46. \quad \int \sqrt{3x-2} \, dx \qquad \frac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3} + C$$

$$47. \quad \int \sqrt[3]{(2x+1)^4} \, dx \qquad \frac{3}{14}\sqrt[3]{(2x+1)^7} + C$$

$$48. \quad \int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \, dx \qquad -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C$$

$$49. \quad \int 2x(x^2+2)^3 \, dx \qquad \frac{1}{4}(x^2+2)^4 + C$$

$$50. \quad \int x^2 \cdot (x^3+4)^6 \, dx \qquad \frac{1}{21}(x^3+4)^7 + C$$

$$51. \quad \int x \cdot \sqrt{x^2+5} \, dx \qquad \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$$

52. $\int x^2 \cdot \sqrt[6]{x^3 + 2} \, dx$ $\frac{2}{7} \sqrt[6]{(x^3 + 2)^7} + C$
53. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$ $\sqrt{1+x^2} + C$
54. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}} \, dx$ $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2-2)^2} + C$
55. $\int \frac{x}{\sqrt{4-5x^2}} \, dx$ $-\frac{1}{5} \sqrt{4-5x^2} + C$
56. $\int e^{4x} \, dx$ $\frac{1}{4} e^{4x} + C$
57. $\int e^{\frac{x}{3}} \, dx$ $3e^{\frac{x}{3}} + C$
58. $\int x e^{1+x^2} \, dx$ $\frac{1}{2} e^{1+x^2} + C$
59. $\int 5x^2 e^{x^3-2} \, dx$ $\frac{5}{3} e^{x^3-2} + C$
60. $\int (x+2) e^{x^2+4x+5} \, dx$ $\frac{1}{2} e^{x^2+4x+5} + C$
61. $\int \frac{1}{x} e^{3+\ln x} \, dx$ $e^{3+\ln x} + C$
62. $\int \frac{x}{\cos^2(x^2-4)} \, dx$ $\frac{1}{2} \operatorname{tg}(x^2-4) + C$
63. $\int \frac{x^2}{\cos^2(2+x^3)} \, dx$ $\frac{1}{3} \operatorname{tg}(2+x^3) + C$
64. $\int \frac{\cos x}{\sin^2(1+\sin x)} \, dx$ $-\operatorname{cotg}(1+\sin x) + C$
65. $\int \frac{e^x}{\sin^2(1-e^x)} \, dx$ $\operatorname{cotg}(1-e^x) + C$
66. $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$

67. $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$ $\frac{1}{5} \ln^5 x + C$
68. $\int \frac{dx}{x(3 + \ln x)^2}$ $-\frac{1}{3 + \ln x} + C$
69. $\int \frac{\sqrt{2 + \ln x}}{x} dx$ $\frac{2}{3} \sqrt{(2 + \ln x)^3} + C$
70. $\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}} dx$ $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} - 4\sqrt{\ln x} + C$

V úlohách 71 – 102 vypočítajte pomocou metódy per partes neurčité integrály:

Výsledky:

71. $\int x e^x dx$ $x e^x - e^x + C$
72. $\int (x - 2) e^x dx$ $(x - 2) e^x - e^x + C$
73. $\int (3x - 1) e^x dx$ $(3x - 1) e^x - 3e^x + C$
74. $\int (2 - 5x) e^x dx$ $(2 - 5x) e^x + 5e^x + C$
75. $\int x e^{2x} dx$ $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$
76. $\int (3x + 1) e^{3x} dx$ $\frac{1}{3} (3x + 1) e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} + C$
77. $\int (1 - x) e^{-x} dx$ $(x - 1) e^{-x} + e^{-x} + C$
78. $\int (2x + 3) e^{\frac{x}{4}} dx$ $(8x + 12) e^{\frac{x}{4}} - 32 e^{\frac{x}{4}} + C$
79. $\int (x^2 + 2) e^x dx$ $(x^2 + 2) e^x - 2x e^x + 2e^x + C$
80. $\int (x^2 - 4x) e^x dx$ $(x^2 - 6x + 6) e^x + C$
81. $\int x^2 e^{2x} dx$ $\frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - x + \frac{1}{2}) + C$

82. $\int (3x-4)\sin x \, dx$ $(4-3x)\cos x + 3\sin x + C$
83. $\int (5x+2)\cos x \, dx$ $(5x+2)\sin x + 5\cos x + C$
84. $\int (x+5)\sin 2x \, dx$ $-\frac{1}{2}(x+5)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
85. $\int (4x-8)\sin 2x \, dx$ $(4-2x)\cos 2x + \sin 2x + C$
86. $\int (x-3)\cos 4x \, dx$ $\frac{1}{4}(x-3)\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$
87. $\int (2x+3)\cos 3x \, dx$ $\frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C$
88. $\int (3-x)\sin \frac{x}{2} \, dx$ $(2x-6)\cos \frac{x}{2} - 4\sin \frac{x}{2} + C$
89. $\int (2-2x)\cos \frac{x}{4} \, dx$ $(8-8x)\sin \frac{x}{4} - 32\cos \frac{x}{4} + C$
90. $\int (x^2+1)\sin x \, dx$ $-(x^2+1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$
91. $\int (x^2+2x)\cos x \, dx$ $(x^2+2x)\sin x + (2x+2)\cos x - 2\sin x + C$
92. $\int x^2 \sin 2x \, dx$ $-\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$
93. $\int (x^2-x+1)\cos 3x \, dx$ $\frac{1}{3}(x^2-x+1)\sin 3x +$
 $+\frac{1}{9}(2x-1)\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C$
94. $\int \ln x \, dx$ $x\ln x - x + C$
95. $\int x\ln x \, dx$ $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$
96. $\int x^2 \ln x \, dx$ $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$
97. $\int x\ln^2 x \, dx$ $\frac{1}{2}x^2(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) + C$

98. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ $\ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$
99. $\int x \ln(x^2 + 3) dx$ $\frac{1}{2}(x^2 + 3) [\ln(x^2 + 3) - 1] + C$
100. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C$
101. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ $-\frac{1}{x} \ln^2 x - \frac{2}{x} \ln x - \frac{2}{x} + C$
102. $\int (x^2 + \frac{2}{3}x) \ln(x+1) dx$ $\frac{1}{3}(x^3 + x^2) \ln(x+1) - \frac{1}{9}x^3 + C$

6 URČITÝ INTEGRÁL

6.1 Definícia určitého integrálu

Majme spojitú a nezápornú funkciu $f: \langle a, b \rangle \rightarrow R$. Rozdelíme interval $\langle a, b \rangle$ na podintervaly $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$, kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Každý takýto systém podintervalov nazveme **delenie intervalu** $\langle a, b \rangle$, body $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ nazývame **deliace body** delenia intervalu $\langle a, b \rangle$. Dĺžku i -tého čiastočného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n$ označujeme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

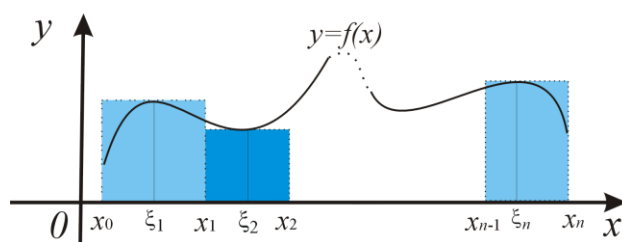
Ak pre každé prirodzené číslo n je dané jedno delenie D_n intervalu $\langle a, b \rangle$, hovoríme o **postupnosti delení** intervalu $\langle a, b \rangle$.

Číslo $\|D\| = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ nazývame **normou delenia** D .

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a, b \rangle$ sa nazýva **normálna**, ak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0$.

Nech $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ je ľubovoľný bod z intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. **Integrálnym súčtom** funkcie f pre delenie D intervalu $\langle a, b \rangle$ a pre danú voľbu čísel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ nazývame číslo

$$S(f, D) = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$



Určitým integrálom funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$ nazývame číslo $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n)$ a

označujeme ho znakom $\int_a^b f(x) dx$. (Ak existuje uvedená limita pre ľubovoľnú normálnu postupnosť delení a ľubovoľnú voľbu bodov ξ_i). Zároveň hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$.

Číslo a nazývame **dolná hranica**, číslo b nazývame **horná hranica** určitého integrálu.

Newtonov-Leibnizov vzorec

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech má na intervale $\langle a, b \rangle$ primitívnu funkciu F . Potom platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Príklad 1 Vypočítajme integrál $\int_1^2 (4x^3 + 2x) dx$.

Riešenie:

Integrál vypočítame využitím Newton-Leibnizovho vzorca

$$\int_1^2 (4x^3 + 2x) dx = \left[x^4 + x^2 \right]_1^2 = (2^4 + 2^2) - (1^4 + 1^2) = 18.$$

6.2 Vlastnosti určitého integrálu

Určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ sme definovali pre $a < b$.

- Ak je funkcia integrovateľná na $\langle a, b \rangle$, platí:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

- Ak aspoň jedno z čísel $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ je nenulové, platí:

$$\int_a^b [k_1 \cdot f(x) + k_2 \cdot g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx.$$

- Nech $c \in (a, b)$, potom platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- Nech $f(x)$ je spojitá **párna** funkcia na intervale $\langle -a, a \rangle$. Potom

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx .$$

- Nech $f(x)$ je spojitá **nepárna** funkcia na intervale $\langle -a, a \rangle$. Potom

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 .$$

6.3 Substitučná metóda

Nech $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle$ má spojitú deriváciu. Nech F je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom funkcia $F[\varphi(x)]$ je primitívna k $f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$ na $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt .$$

Príklad 2 Vypočítajme integrál $\int_1^e \frac{3 + \ln x}{x} dx$.

Riešenie:

$$\int_1^e \frac{3 + \ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} 3 + \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ a = 1 \rightarrow \alpha = 3 + \ln 1 = 3 \\ b = e \rightarrow \beta = 3 + \ln e = 4 \end{array} \right| = \int_3^4 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_3^4 = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

Príklad 3 Vypočítajme integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - 3 \sin x) \cos x dx$.

Riešenie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - 3 \sin x) \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ x_1 = 0 \rightarrow t_1 = \sin 0 = 0 \\ x_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 (t^2 - 3t) dt = \left[\frac{t^3}{3} - 3 \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{6}$$

6.4 Metóda per partes

Veta 1.1 Nech funkcie $u(x)$, $v(x)$ majú spojité derivácie na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Príklad 4 Vypočítajte integrál $\int_1^2 (2x-1) e^{2x} dx$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x-1) e^{2x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x-1 \quad v' = e^{2x} \\ u' = 2 \quad v = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right| = \left[(2x-1) \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - 2 \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx = \left[(2x-1) \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 = \\ &= 3 \frac{e^4}{2} - \frac{e^4}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} \right) = e^4. \end{aligned}$$

V úlohách 1 – 12 vypočítajte určité integrály:

Výsledky:

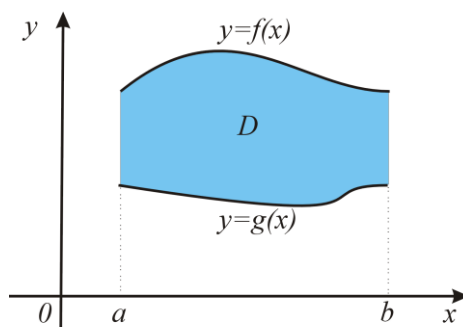
- | | | |
|----|--|------------------------|
| 1. | $\int_0^1 (x^2 + x + 1) dx$ | $\frac{11}{6}$ |
| 2. | $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ | $\frac{8}{3}$ |
| 3. | $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} dx$ | -6 |
| 4. | $\int_0^1 \frac{e^x}{3 + e^x} dx$ | $\ln \frac{3+e}{4}$ |
| 5. | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2 \sin x + 3 \sin^2 x) \cos x dx$ | 3 |
| 6. | $\int_2^3 (1-x)^{-3} dx$ | $-\frac{3}{8}$ |
| 7. | $\int_0^1 2x(x^2 + 2)^3 dx$ | $\frac{65}{4}$ |
| 8. | $\int_0^1 x e^{1+x^2} dx$ | $\frac{1}{2}(e^2 - e)$ |

9. $\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx$ $\frac{2}{3}(\sqrt{27}-\sqrt{8})$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos x)^4 \sin x dx$ $\frac{31}{5}$
11. $\int_1^2 (3x-1)e^x dx$ $2e^2 + e$
12. $\int_2^e x \ln x dx$ $\frac{1}{4}e^2 - \ln 4 + 1$

7 APLIKÁCIE URČITÉHO INTEGRÁLU

7.1 Elementárna oblasť

Nech funkcie $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité a nech pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ je $g(x) \leq f(x)$. Potom množinu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ nazývame **elementárnou oblasťou** v $\mathbb{R}^2$ **vzhľadom na os** o_x (elementárnou oblasťou typu $[x, y]$).



7.2 Geometrické aplikácie určitého integrálu

Plošný obsah rovinných útvarov

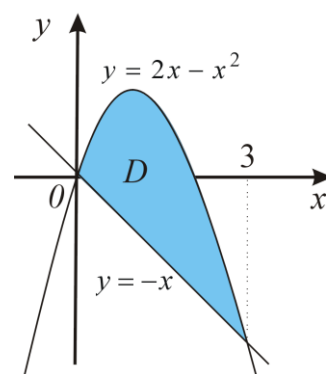
Plošný obsah elementárnej oblasti D typu $[x, y]$ vypočítame podľa vzorca

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Príklad 1 Vypočítajme obsah časti roviny ohraničenej krivkami $y = -x$ a $y = 2x - x^2$.

Riešenie:

Načrtneme dané krivky a množinu nimi určenú označme D .



Aby sme množinu D popísali, potrebujeme vypočítať priesečníky daných kriviek:

$$-x = 2x - x^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3.$$

Množina D je elementárna oblasť typu $[x, y]$ a preto ju môžeme vyjadriť nerovnosťami:

$$0 \leq x \leq 3$$

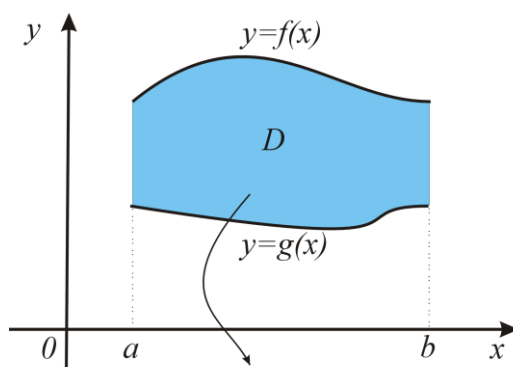
$$-x \leq y \leq 2x - x^2.$$

Pre obsah množiny D platí: $P = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{9}{2}.$

Objem rotačného telesa

Majme danú elementárnu oblasť vzhľadom na os o_x

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$



Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou tejto oblasti okolo osi o_x , vypočítame podľa vzorca

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

Príklad 2 Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ okolo osi o_x .

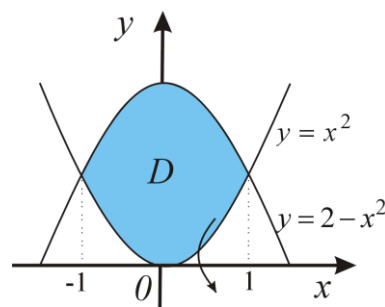
Riešenie:

Načrtneme dané krivky a nimi ohraničenú oblasť označme napr. D .

Aby sme množinu D popísali, potrebujeme vypočítať priesečníky daných kriviek:

$$x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1.$$

Množina D je elementárna oblasť typu $[x, y]$ a preto ju môžeme popísať nerovnosťami:



$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1 \\ x^2 &\leq y \leq 2 - x^2. \end{aligned}$$

Pre objem telesa

$$\text{platí: } V = \pi \int_{-1}^1 \left[(2 - x^2)^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \int_{-1}^1 (4 - 4x^2) dx = 4\pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{16}{3}\pi.$$

$$V = \pi \int_{-1}^2 \left[(y + 2)^2 - (y^2)^2 \right] dy = \pi \int_{-1}^2 (y^2 + 4y + 4 - y^4) dy = \pi \left[\frac{y^3}{3} + 2y^2 + 4y - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^2 = \frac{72}{5}\pi.$$

V úlohách 1 – 24 vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkami:

Výsledky:

1.	$y = 2x, y = x, x = 5$	$\frac{25}{2}$
2.	$y = 5 - 2x, y = 2 + x, x = 0$	$\frac{3}{2}$
3.	$y = x^2 - 2x, y = 0$	$\frac{4}{3}$
4.	$y = x^2 - 2x, y = x$	$\frac{9}{2}$
5.	$y = 6x - x^2, y = 0$	36
6.	$y = -x^2 + 4x - 2, y + x = 2$	$\frac{9}{2}$
7.	$y = x^2 - 3x + 10, y = 2x + 4$	$\frac{1}{6}$
8.	$y = x^2 + x, y = 2x + 2$	$\frac{9}{2}$
9.	$y = -x^2 + 2, y = -3x + 4$	$\frac{1}{6}$
10.	$y = x^2 - x - 6, y = -x^2 + 5x + 14$	$\frac{343}{3}$
11.	$y = x^2 + 2x + 10, y = -x^2 - 4x + 18$	$\frac{125}{3}$
12.	$y = x^2 - x, y = -x^2 + 3x$	$\frac{8}{3}$
13.	$y = 2x^2 - x - 2, y = x^2 + 2x + 2$	$\frac{125}{6}$
14.	$y = x^2, y^2 = x$	$\frac{1}{3}$

15.	$xy = 4, x + y = 5$	$\frac{15}{2} - 8 \ln 2$
16.	$xy = 5, y = 6 - x$	$12 - 5 \ln 5$
17.	$y = \frac{4}{x}, y = 6 - 2x$	$3 - 4 \ln 2$
18.	$y = x^3, y = 4x$	8
19.	$y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$	$e - 1$
20.	$y = e^{2x}, y = e^x + 2, x = 0$	$2 \ln 2 - \frac{1}{2}$
21.	$y = e^{2x} - 3, y = e^x - 1, x = 0$	$2 \ln 2 - \frac{1}{2}$
22.	$y = 2e^x + 3, y = e^{2x}, x = 0$	$3 \ln 3$
23.	$y = 3 - x, y = x, y = 0$	$\frac{9}{4}$
24.	$y = x + 1, y = 7 - x, y = 0$	16

V úlohách 25 – 42 vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi o_x oblasti ohraničenej krivkami:

Výsledky:

25.	$y = 2x, y = x, x = 5$	125π
26.	$y = 5 - 2x, y = 2 + x, x = 0$	10π
27.	$y = 3x + 1, y = 0, x = 0, x = 1$	7π
28.	$y = 2x - x^2, y = 0$	$\frac{16}{15}\pi$
29.	$y = x^2 + 2, y = 2x^2 + 1$	$\frac{24}{5}\pi$
30.	$y = x^2, y = 1 - x^2$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$
31.	$y = x^2 + 2, y = 0, x = -1, x = 3$	$\frac{1532}{15}\pi$
32.	$y = 6x - x^2, y = 0$	$\frac{1296}{5}\pi$
33.	$y = x^2, y^2 = x$	$\frac{3}{10}\pi$
34.	$xy = 4, x + y = 5$	9π
35.	$xy = 5, y = 6 - x$	$\frac{64}{3}\pi$
36.	$y = \frac{4}{x}, y = 6 - 2x$	$\frac{4}{3}\pi$
37.	$y = x^3, y = 4x, x \geq 0$	$\frac{512}{21}\pi$

38. $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$ $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$
39. $y = e^{-\frac{x}{10}}, y = 0, x = 0, x = 10$ $5\pi(1 - e^{-2})$
40. $y = e^{\frac{x}{2}}, y = e, x = 0$ $\pi(e^2 + 1)$
41. $y = e^{2x}, y = 1, x = 4$ $\frac{\pi}{4}(e^{16} - 17)$
42. $y = e^x, y = \frac{1}{x}, x = 2, x = 3$ $\frac{\pi}{6}(3e^6 - 3e^4 - 1)$

POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] *Demidovič, B. P.:* **Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu**, Nauka, Moskva, 1977.
- [2] *Džurina, J. - Grinčová, A. - Pirč, V.:* **Matematická analýza 1**, ISBN 80-8073-307-4.
Názov www stránky: http://217.67.26.34/active_download/mal/ulern_viewer.htm
- [3] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.:* **Zbierka úloh z vyššej matematiky 1**, ALFA, Bratislava 1968, ISBN 63-066-68.
- [4] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.:* **Zbierka úloh z vyššej matematiky 2**, ALFA, Bratislava 1969, ISBN 63-037-69.
- [5] *Ivan, J.:* **Matematika 1**, ALFA/SNTL, Bratislava 1983.
- [6] *Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.:* **Sbírka řešených příkladů z matematiky**, SNTL/ALFA, Praha 1982.
- [7] *Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M.:* **Matematika I**, SVTL, Bratislava 1966.
- [8] *Marčoková, M. - Moravčík, J. - Ružičková, M.:* **Matematika IV**, Žilinská univerzita, EDIS - vydavateľstvo ŽU, 2000, ISBN 80-7100-697-1.
- [9] *Pirč, V. - Haščák, A.:* **Matematická analýza I**, elfa s.r.o. Košice 2000, ISBN 80-88786-92-4.
- [10] *Šoltés, V. - Juhássová, Z.:* **Zbierka úloh z vyššej matematiky I**, Edičné stredisko TU v Košiciach 1992.

NÁZOV: Matematika II v príkladoch pre Aplikovanú informatiku
AUTOR: Grinčová Anna
VYDAVATEĽ: Technická univerzita v Košiciach
ROK: 2026
VYDANIE: prvé
ROZSAH: 59 strán
ISBN:

