

# Matematika 1 – 4.cvičenie

**RNDr. Z. Gibová, PhD.**

# Limita funkcie

**Zápis limity:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

## Pri výpočte limity:

- a) dosadíme za neznáme  $x$  číslo  $a$ , ak **žiadna neurčitost'**, vypočítame limitu
- b) ak **neurčitost'**, limitu najprv upravíme tak, aby sme sa zbavili neurčitosti, až potom dopočítame limitu

**Typy neurčitosti:**  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$

**Pr. 1 – 16 / 1:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$$

**Pr. 2:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 4}$$

- 3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 4} = \frac{1^3 + 3 \cdot 1 + 5}{1^2 - 4} = \frac{9}{-3} = -3$$

b -1) dosadíme za neznáme  $x$  číslo  $a$ , ak **neurčitost'**  $\frac{0}{0}$ , urobíme rozklad na súčin v čitateli aj v menovateli (**ak v čitateli a menovateli polynómy**)

**Pr. 3 – 16 / 7:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x + 5}$$

**Pr. 4:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4}$$

**Pr. 5 – 16 / 3:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

4

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Dú : 16 / 2, 4, 6, 8, 9

b - 2) goniometrická funkcia, dosadíme, ak **neurčitost'**  $\frac{0}{0}$ , použijeme vzorec

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{\otimes \rightarrow 0} \frac{\sin \otimes}{\otimes} = 1$$

$$\lim_{\otimes \rightarrow 0} \frac{\otimes}{\sin \otimes} = 1$$

**Pr. 6 – 17 / 23:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$$

**Pr. 7:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos 2x}{\sin 8x}$$

Pr. 8 – 17 / 18: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \stackrel{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3.0}{0} = \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{3}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{1} = 1 \cdot 3 = 3$$

Dú : 17 / 19 - 22

b - 3) dosadím, ak **neurčitost**  $\frac{\infty}{\infty}$ , delíme čitateľa aj menovateľa **najvyššou mocninou v menovateli** (ak v čitateli a menovateli polynómy)

Platí:  $\infty \cdot \infty = \infty$ ,  $-\infty \cdot -\infty = \infty$ ,  $-\infty \cdot \infty = -\infty$ ,  $c \cdot \infty = \infty$   
 $\infty + \infty = \infty$ ,  $-\infty - \infty = -\infty$ ,  $\infty + c = \infty$ ,  $\sqrt{\infty} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ak  $f(x)$  rastie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Ak  $f(x)$  klesá:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

**Pr. 9 – 17 / 29:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$$

**Pr. 10 – 17 / 30:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x}{10x^2 - 3x + 1}$$

## Pr. 11: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + x + 1}{3x^2 + 1} \qquad \frac{-4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + x + 1}{3x^2 + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-4x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-4 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{3 + \frac{1}{\infty}} = \frac{-4}{3}$$

najvyššia mocnina

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3} \quad \text{Dú} \qquad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{3x - 1} \quad \text{Dú} \qquad \frac{2}{3}$$

Dú : 17 / 31, 32

b - 4) dosadíme, ak **neurčitost'**  $\infty - \infty$  , rozšírime **vhodnou jednotkou** a potom delíme čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou v menovateli

**Pr. 12:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - 2} \right)$$

**Pr. 13 – 17 / 34:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x})$$

**Pr. 14:** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x+3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}) \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5 - x-3}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = 0$$

najvyššia mocnina je  $\sqrt{x}$

## 2. Malá písomka

### Skupina A

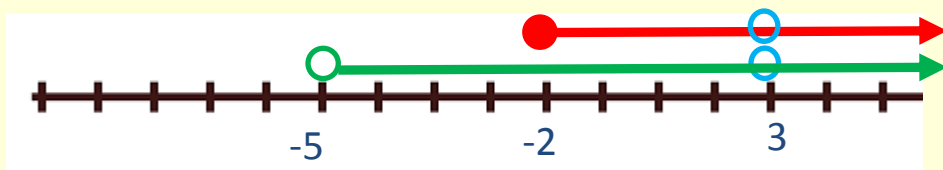
Určte definičný obor funkcie  $f: y = \frac{5x+1}{x-3} + \sqrt{x+2} + \log_3(x+5)$

*z podmienky pre odmocninu*  $x + 2 \geq 0$

*z podmienky pre logaritmus*  $x + 5 > 0$  0,15 bodu

*z podmienky pre zlomok*  $x - 3 \neq 0$

$$x \geq -2 \wedge x \neq 3 \wedge x > -5 \quad 0,15 \text{ bodu}$$



0,1 bodu

$$D(f) = \langle -2, \infty \rangle - \{3\}$$

0,1 bodu

## Skupina B

Určte definičný obor funkcie f:  $y = \sqrt[4]{\frac{1}{x-2}} + \arccos(x-2)$

z podmienky pre odmocninu,  $\frac{1}{x-2} \geq 0$

0,15 bodu

z podmienky pre zlomok,  $x - 2 \neq 0$

z podmienky pre arccosinus,  $-1 \leq x - 2 \leq 1$

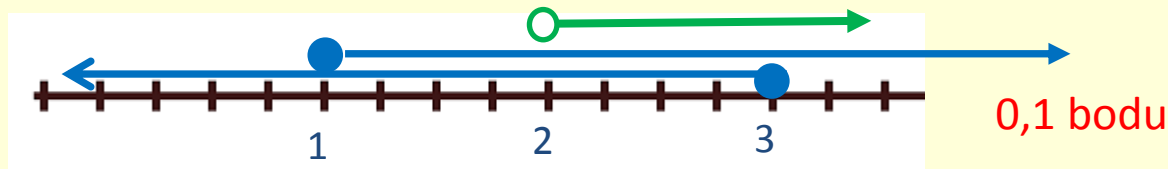
$$\frac{1}{x-2} \geq 0 \wedge x \neq 2 \wedge -1 \leq x-2 \wedge x-2 \leq 1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x-2 > 0}$

$$-1 + 2 \leq x \wedge x \leq 1 + 2$$
$$1 \leq x \wedge x \leq 3$$

0,15 bodu

$$x = 0, x + 2 = 0 \text{ NB: } -2; 0$$



0,1 bodu

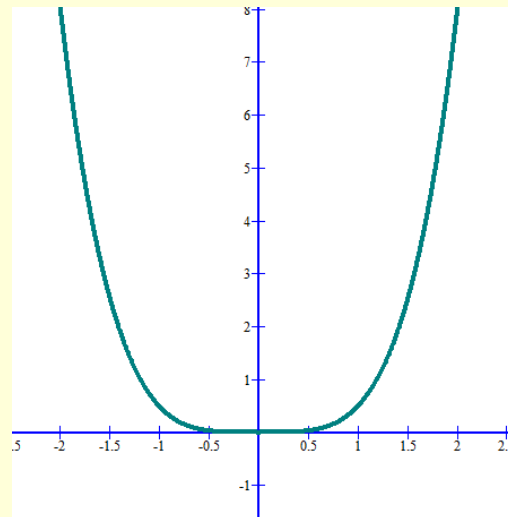
$$D(f) = (2, 3)$$

0,1 bodu

## 1. Malá písomka

1. Určte vlastnosti grafu na obrázku ( $D(f)$ ,  $H(f)$ ), párnosť, nepárnosť, ohraničenosť, prostosť:

$D(f) = \mathbb{R}$ ,  $H(f) = (0, \infty)$ , párna, nie je prostá,  
ohraničená zdola v  $f(x) = 0$  **0,5b**



2. Načrtnite graf funkcie  $y = \log_{0,2}(x + 5)$ .

$$D(f) = (-5, \infty)$$

asymptota:  $x - 5 = 0$   
 $x = 5$

priesečník s osou x:  $y = 0$     priesečník s osou y:  $x = 0$

$$0 = \log_{0,2}(x + 5)$$

$$0,2^0 = x + 5$$

$$1 = x + 5$$

$$A: x = -4, y = 0$$

$$y = \log_{0,2}(0 + 5)$$

$$0,2^y = 5$$

$$\frac{2^y}{10} = 5$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$$

$$B: y = -1, x = 0$$

