

Matematika I, opak. – 5.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Zopakujte si:

Zápis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ nazývame limita funkcie.

Pri výpočte limity $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

a) dosadíme za $x = 3$ a vypočítame limitu,

b) delíme čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou v menovateli,

→ c) odstránime neurčitost' rozkladom čitateľa aj menovateľa na súčin koreňových činiteľov.

Vyberte neurčitost', ktorej sa pri výpočte limity musíme zbaviť

a) ∞

→ b) $\frac{0}{0}$

c) ∞, ∞

Výraz $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ predstavuje jednostrannú limitu.

Podmienka pre definičný obor funkcie $y = \frac{x+1}{5x}$ je $5x \neq 0$.

Asymptotu bez smernice určujeme v bode nespojitosti.

Funkcia má asymptotu so smernicou aj k a q sú vlastné čísla.

Pr. 14: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x+3}) \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5 - x-3}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x} + \frac{5}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = 0$$

najvyššia mocnina je $\sqrt{x}$

2 - h) dosadíme, ak **neurčitost** 1^∞ , použijeme jeden zo vzorcov

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{1}{x}\right)^x = e^{\pm 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k, \quad f(x) \rightarrow \infty$$

Pr. 15 – 22 / 21: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^x$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$$

Pr. 16: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-5}\right)^{2x} \quad e^6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-5}\right)^{2x} \stackrel{\left(1 + \frac{2}{\infty}\right)^\infty = 1^\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-5}\right)^{2x \frac{(x-5)}{x-5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x-5}\right)^{x-5}\right]^{\frac{2x}{x-5}} =$$

$$e^{3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-5}} = e^{3 \cdot \frac{2}{1-0}} = e^6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{8x}\right)^x \quad \text{Dú} \quad e^{-\frac{1}{8}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x+1}\right)^{x-1} \quad \text{Dú} \quad e^3$$

Asymptoty funkcie

Jednostranné limity:

limita pre x idúce k a sprava

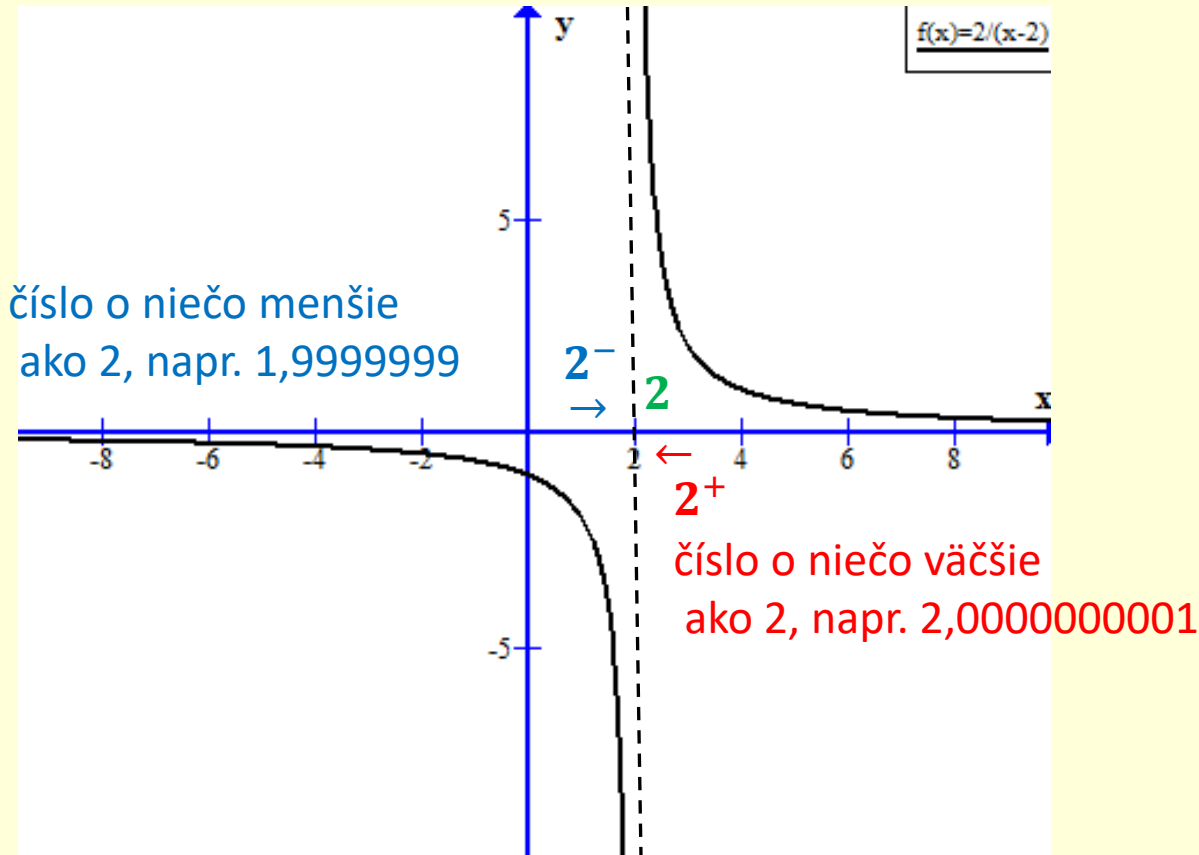
limita pre x idúce k a zľava

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Asymptota je priamka, ktorá opisuje správanie sa krivky, graf funkcie sa k nej približuje.

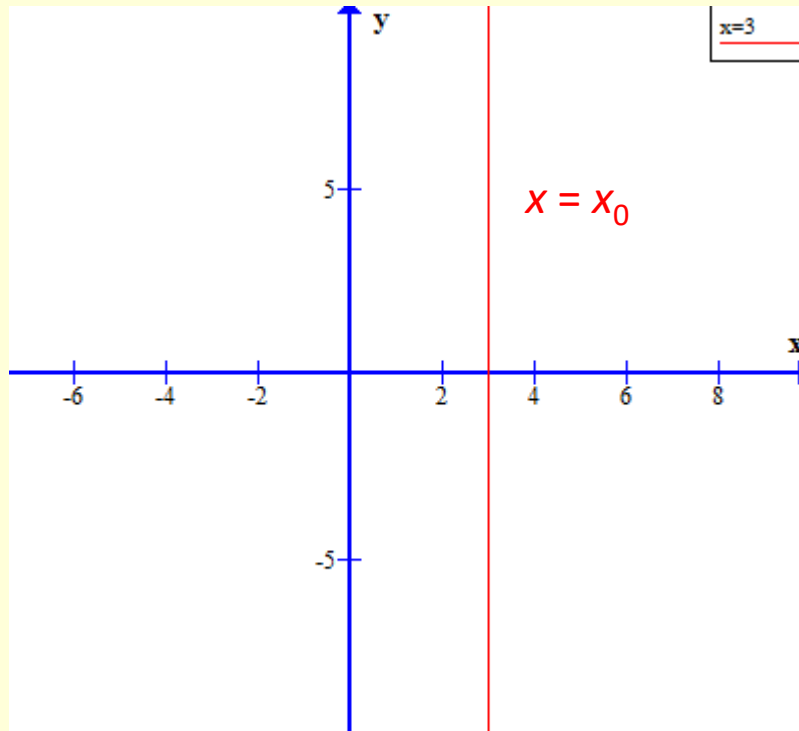
Asymptota bez smernice (ABS): priamka $x = x_0$

vypočítame jednostranné limity **v bode nespojitosti** x_0 (bod v ktorom funkcie nie je **definovaná**), ak vyjdú nevlastné čísla $\pm\infty$ (stačí jedna z limít rovná $\pm\infty$, potom funkcia má ABS)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

potom **ABS je** $x = x_0$

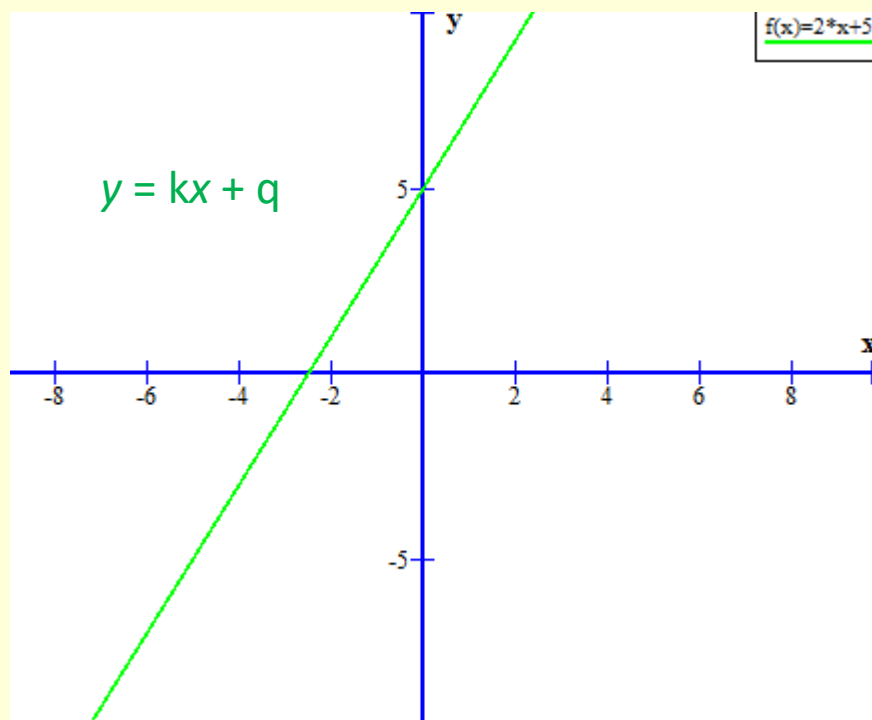


Asymptota so smernicou (ASS): priamka $y = kx + q$

vypočítame k , q , ak vyjdú vlastné čísla (ak aspoň jedna z limít je nevlastná alebo neexistuje, potom ASS neexistuje)

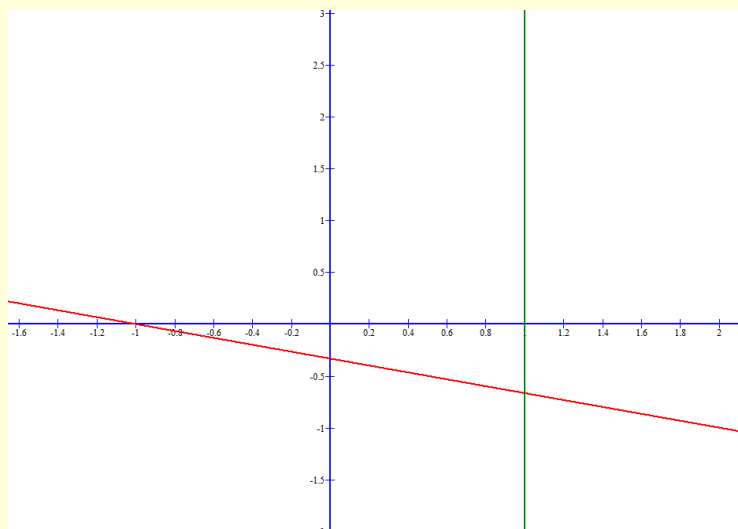
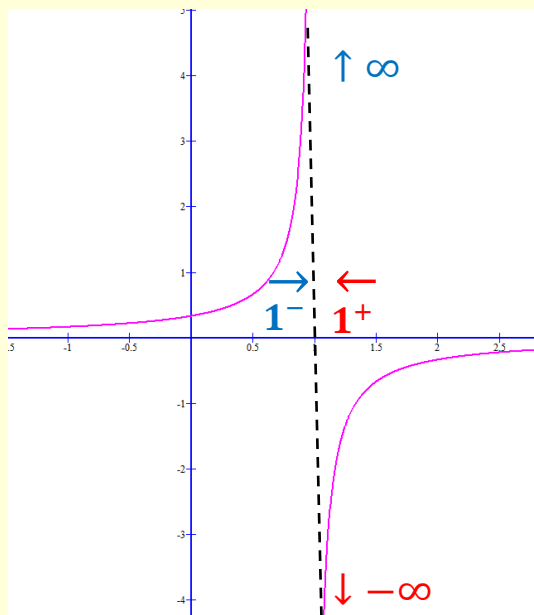
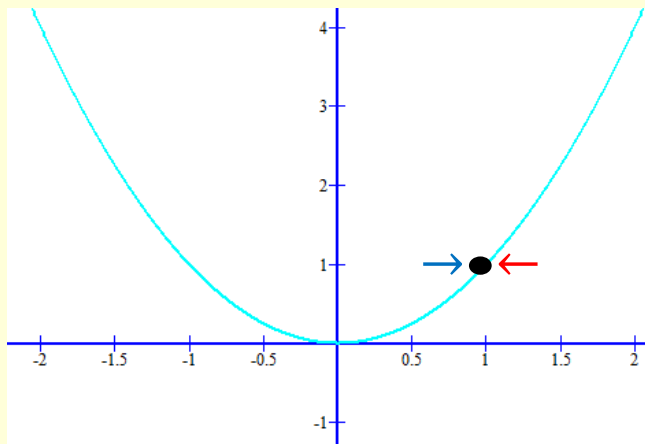
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

potom ASS je $y = k_1x + q_1$, $y = k_2x + q_2$



Pr. 1: Určte ASS a ABS funkcie

$$y = \frac{x^2}{3-3x}$$



ASS: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ pre $x \rightarrow \pm\infty$

ABS: $x = 1$

Pr. 2 - 47/ 2: Určte ASS a ABS funkcie

$$y = x^3 + 3x^2 - 2$$

Pr. 3: Určte ASS a ABS funkcie

$$y = \frac{2x^2}{2x - 1}$$

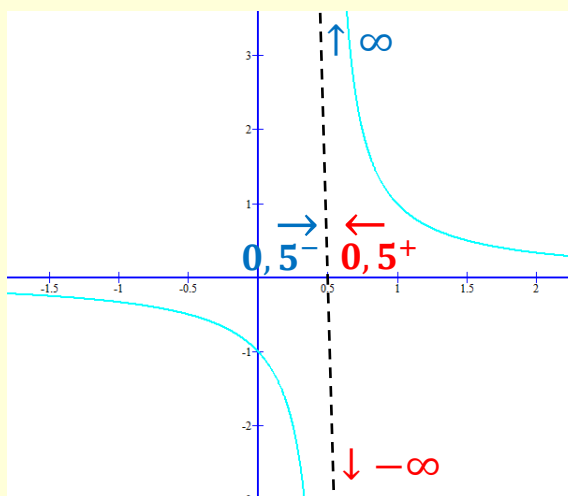
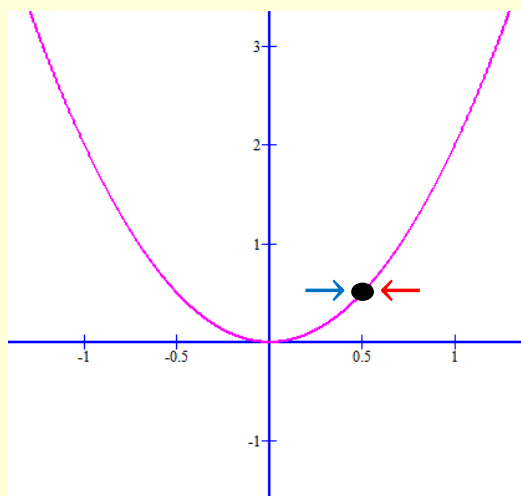
$$2x - 1 \neq 0$$

$$x \neq \frac{1}{2}, \quad D(f) = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

bod nespojitosti $x_0 = 0,5$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} \frac{2x^2}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} \frac{1}{2x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0,5^+} 2x^2 = \frac{1}{0^+} \cdot (+ \text{číslo}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5^-} \frac{2x^2}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0,5^-} \frac{1}{2x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0,5^-} 2x^2 = \frac{1}{0^-} \cdot (+ \text{číslo}) = -\infty$$

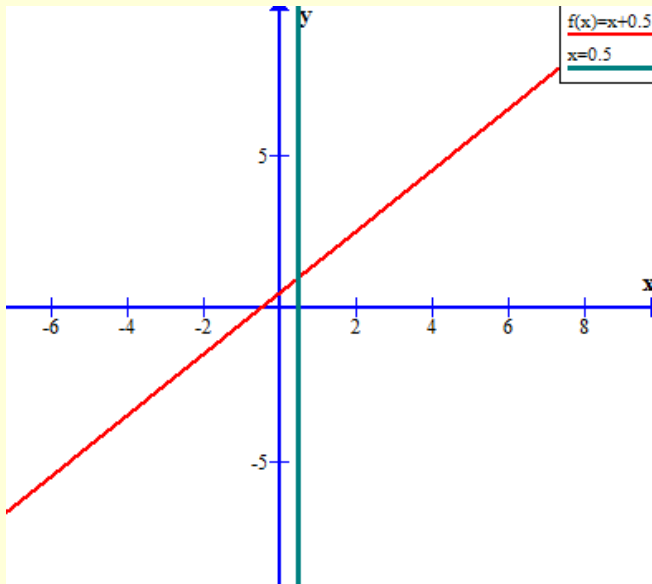


ABS: $x = 0,5$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{2x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{2x^2 - x} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x^2}{2x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x^2 - 2x^2 + x}{2x-1} \right] = \frac{1}{2}$$

ASS: $y = x + 0,5$ *pre* $x \rightarrow \pm\infty$



ASS: $y = x + 0,5$ *pre* $x \rightarrow \pm\infty$

ABS: $x = 0,5$

Pr. 4 - 47 / 12: Určte ASS a ABS funkcie

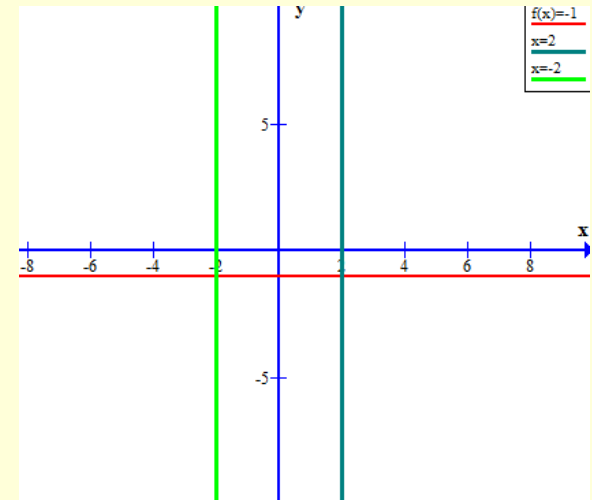
$$y = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{4 - x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 = \frac{1}{0^+} \cdot 4^- = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{4 - x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 = \frac{1}{0^-} \cdot 4^- = -\infty$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{4 - x^2} \right] = -1$$



ASS: $y = -1$ pre $x \rightarrow \pm\infty$

ABS: $x = -2$ ABS: $x = 2$

Pr. 5 - 47/ 11: Určte ASS a ABS funkcie

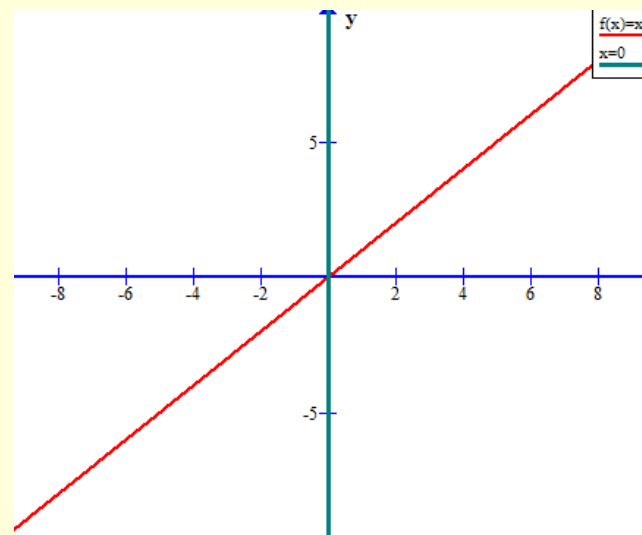
$$y = x - \frac{1}{x}$$

$$x \neq 0$$
$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

bod nespojnosti $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{1}{x} = 0^+ - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \frac{1}{x} = 0^- - \frac{1}{0^-} = \infty$$



ABS: $x = 0$

ASS: $y = x$ pre $x \rightarrow \pm\infty$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - \frac{1}{x} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right] = 0$$

Dú – 47 / 1, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 16