

Matematika I, opak. – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Zopakujte si:

1. Výraz $x^2 \cdot \sin x$ budeme derivovať ako súčin 2 funkcií.

2. Derivácia $f(x) = x$ je

- a) 1,
b) 0,
c) x .

3. Derivácia $f(x) = 1999^2$ je

- a) 1999
b) 2.1999
→ c) 0

4. Derivácia $\frac{f(x)}{g(x)}$ je

a) $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

b) $\frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{g^2(x)}$

c) $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

5. Smernica dotyčnice sa vypočíta ako $f'(x_0)$

6. Rovnica normály ku grafu je daná $y - y_0 = k_n(x - x_0)$

Derivácia funkcie

Označenie derivácie funkcie v bode x_0 : $f'(x_0)$

Pravidlá pre výpočet derivácie funkcie:

$$[cf(x)]' = cf'(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

$$[f(x)^{g(x)}]' = [e^{g(x) \cdot \ln f(x)}]'$$

Na pr.:

$$(3x)'$$

$$(2x^2 + 5 - \ln x)'$$

$$(x \cdot \ln x)'$$

$$\left(\frac{3x}{\sin x}\right)'$$

$$(\ln \sin 2x)'$$

$$[(\sin x)^x = e^{x \ln \sin x}]'$$

Derivácie elementárnych funkcií:

- $[c]' = 0$ $[x^1]' = 1$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$

Derivácie elementárnych funkcií - príklady:

$$[c]' = 0 \quad c = \text{konštanta, číslo}$$

$$\text{Nap.: } (2)' = 0, (e^5)' = 0, (\ln 4)' = 0, (2026^4)' = 0$$

$$[cf(x)]' = cf'(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Nap.: } \left(\frac{1}{4} \ln x\right)' = \frac{1}{4} (\ln x)'$$

$$(3e^x)' = 3(e^x)'$$

$$\left(9x^5 + \frac{\sin x}{10}\right)' = 9(x^5)' + \frac{1}{10}(\sin x)'$$

$$[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in R$$

Napr.: $(x^2)'$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' \quad \left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})'$$

$$\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}$$

$$(\sqrt{x^3})' = (x^{\frac{3}{2}})' \quad \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{4}})'$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g(x)'$$

Elementárna funkcia	Zložená funkcia
$\sin x$	$\sin(5x + 6)$
$\ln x$	$\ln(\sqrt{3}x)$
x^3	$(\cos x + 2x)^3$
$\arcsin x$	$\arcsin(x^3 + 1)$

Pr. 1: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \frac{\sin x}{2} + x \cdot 2^x + \frac{4x^5}{\ln x} - \sqrt{x^3}$$

Pr. 2 – 25 /2: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} + 5^x - \ln x$$

$$f'(x) = (x^{\frac{4}{3}})' + (5^x)' - (\ln x)'$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-1} + 5^x \cdot \ln 5 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} + 5^x \cdot \ln 5 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} + 5^x \cdot \ln 5 - \frac{1}{x}$$

Pr. 3: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{\operatorname{arctg} x} + \cos 5x + \frac{4}{x^7} + e^1$$

Pr. 4: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \frac{5}{x} + \frac{2x}{x^3+4x} + \arcsin^3 x - \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Pr. 5: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg}(3x + 2) + 2x \cdot e^x + \operatorname{arccotg} x$$

$$f'(x) = \operatorname{tg}'(3x + 2) \cdot (3x + 2)' + (2x)' \cdot e^x + 2x \cdot (e^x)' + (\operatorname{arccotg} x)'$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g(x)' \quad (fg)' = f'g + fg' \quad (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(3x+2)} \cdot 3 + 2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x - \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (3x + 2)' = 3 \cdot 1 \cdot x^0 + 0 = 3 \quad (2x)' = 2 \cdot 1 \cdot x^0 = 2 \quad (e^x)' = e^x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(3x+2)} \cdot 3 + 2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x - \frac{1}{1+x^2}$$

Pr. 6: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x + 8x^7\right) \cdot \arccos(\log_2 5x) + \sqrt{2 - x^2 + 3^x}$$

Pr. 7: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{1+x^2}\right) + \cos(\operatorname{cotg} 3x)$$

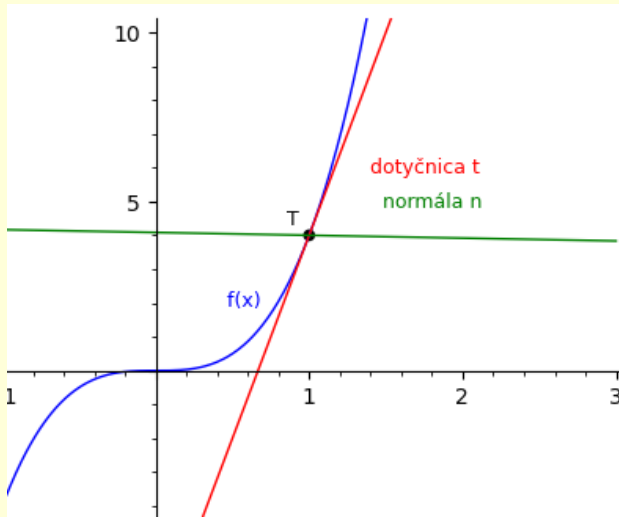
$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g(x)'$$

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \left[\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right] - \sin(\operatorname{cotg} 3x) \frac{-1}{\cos^2 3x} \cdot 3$$

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sin(\operatorname{cotg} 3x) \frac{3}{\sin^2 3x}$$

Dú – str. 25 / 1 – 24, 32, 34, 35

Geometrický význam derivácie funkcie



dotykový bod $T [x_0, y_0]$ ku grafu funkcie $f(x)$

Smernica dotyčnice = derivácia $f'(x_0)$ v dotykovom bode T ku grafu $f(x)$

$$k_t = f'(x_0)$$

Rovnica dotyčnice v dotykovom bode T ku grafu $f(x)$

$$t: y - y_0 = k_t (x - x_0)$$

Smernica normály $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{k_t}$

Rovnica normály v dotykovom bode T ku grafu $f(x)$ kolmo na dotyčnicu

$$n: y - y_0 = k_n (x - x_0)$$

Pr. 1 – 29 / 5: Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu $f(x) = \sqrt{2x}$ v dotykovom bode $T \left[\frac{1}{2}, ? \right]$

Pr. 2 – 29 / 3: Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu $f(x) = x^3 + 9x + 2$ v dotykovom bode $T [0, ?]$

$$t: 9x - y + 2 = 0$$

$$n: x + 9y - 18 = 0$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = 0^3 + 9 \cdot 0 + 2 = 2 \quad T[0, 2]$$

$$f'(x) = 3x^2 + 9 \quad k_t = f'(x_0) = 3 \cdot 0^2 + 9 = 9$$

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{9}$$

$$t: y - y_0 = k_t (x - x_0)$$

$$y - 2 = 9(x - 0)$$

$$y - 2 = 9x$$

$$\underline{t: 0 = 9x - y + 2}$$

$$n: y - y_0 = k_n (x - x_0)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{9}(x - 0)$$

$$-9y + 18 = x$$

$$\underline{n: 0 = x + 9y - 18}$$

Dú – str. 29 / 4, 6, 8, 10

3. Malá písomka

Skupina A: 1. (0,5b) Vypočítajte limitu funkcie

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 6x + 8} \stackrel{\substack{0,1 \\ 0 \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-2)(x-4)} \stackrel{0,1}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-2} \stackrel{0,1}{=} \frac{4+4}{4-2} \stackrel{0,1}{=} 4$$

2. (0,5b) Doplňte a) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ 0,2

b) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 0,1

c) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 0,1

d) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ 0,1

3. Malá písomka

Skupina B: 1. (0,5b) Vypočítajte limitu funkcie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{(\cos 5x) x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 5x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 5x} = 1$$

2. (0,5) Doplňte

a) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ 0,2

b) $(x)' = 1$ 0,1

c) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ 0,1

d) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 0,1