

POSTUP PRI VÝPOČTE LIMÍT

- DOSADZOVANÍM DO F-CIE ZISTÍME TYP NEURČITOSTI
- MOŽNOU ÚPRAVU NEURČITOSTI ODSTRÁNIME
- OPĽATOVNÍM DOSADZOVANÍM LIMITU VÝPOČÍTAME

PRÍKLAD: VÝPOČÍTANIE LIMITY

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \left\{ \frac{3^2 - 9}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6} = \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{3+3}{3-2} = \frac{6}{1} = \underline{\underline{6}}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{3x^2 + 4} = \left\{ \frac{\infty^2 + 2 \cdot \infty - 1}{3 \cdot \infty^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 2x - 1) \cdot \frac{1}{x^2}}{(3x^2 + 4) \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 0 - 0}{3 + 0} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + x} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\infty + 2}{1} = \underline{\underline{\infty}}$$

POZNÁMKA: PRI NEURČITOSTIACH TYPU $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ Z FUNKCIÍ $f(x) = \frac{\text{POLYNÓM}}{\text{POLYNÓM}}$ PLATÍ

- AK SÚ POLYNÓMY ROVNAKÉHO STUPŇA, LIMITA F-CIE JE PODIEL KOEFICIENTOV PRI NAJVIŠŠÍCH MOCNINÁCH x (PRÍKLAD 3)
- AK JE V ČITATELI NIŽŠÍ STUPEŇ POLYNÓMU AKO V MENOVATELI, LIMITA JE 0
- AK JE V ČITATELI VYŠŠÍ STUPEŇ POLYNÓMU AKO V MENOVATELI, LIMITA JE $\pm \infty$

SPOJITOSŤ F-CIE

DEF: NECH $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ A NECH $a \in A$. HOVORÍME, ŽE FUNKCIA f JE **SPOJITÁ** V BODE a ,

$$\text{AK } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

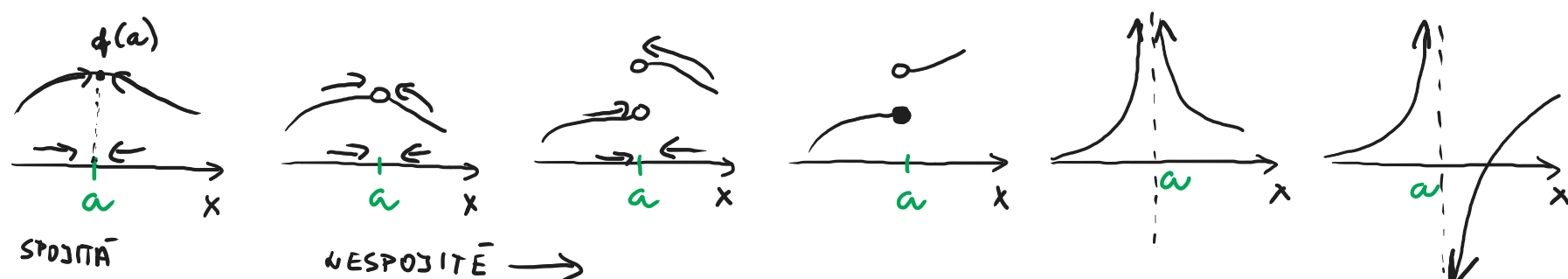
POZNÁMKA: F-CIA JE SPOJITÁ, AK JE SPOJITÁ V KAŽDOM BODE DEFINIČNÉHO OBOBU

LEMA: NECH F-CIE $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ A $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ SÚ SPOJITÉ V BODE $a \in A$ A NECH $c \in \mathbb{R}$.

POTOM V BODE a SÚ SPOJITÉ AJ F-CIE:

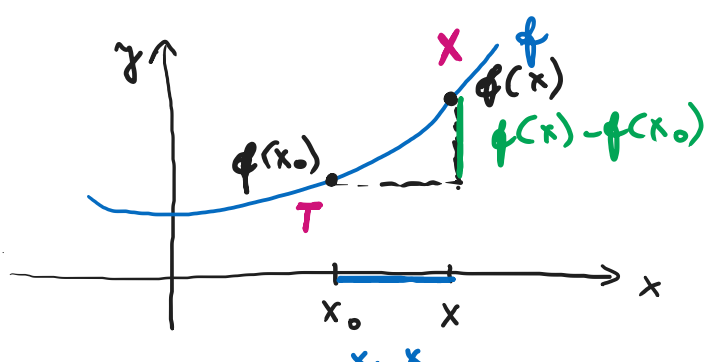
$$\begin{aligned} & f+g \\ & f-g \\ & c \cdot f \\ & f \cdot g \\ & |f| \rightarrow \text{ABSOLÚTNA MODNOTA} \end{aligned}$$

A AK $g(a) \neq 0$, TAK AJ PODIEL $\frac{f}{g}$ JE SPOJITÝ V BODE a .



DERIVÁCIA F-CIE

- VYJADRUJE OKAMŽITÚ RÝCHLOSŤ ZMENY HODNOTY F-CIE VZHĽADOM NA MALÚ ZMENU JEJ PREMENNEJ V DANOM BODE
- JE TO LIMITA PODERU ZMENY FUNKČNÝCH MODNÔT PRISLÚCHAJÚCICH K ZMENE NEZÁVISLEJ PREMENNEJ



DEF: HOVORÍME, ŽE F-CIA f MÁ V BODE $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ DERIVÁCIU, AK JE f DEFINOVANÁ

$$\text{V OKOLÍ BODU } x_0 \text{ A EXISTUJE LIMITA } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

TÚTO LIMITU NAZÝVAME DERIVÁCIU F-CIE f V BODE x_0 .

OZNACUJEME $f'(x_0)$

INÉ POUŽÍVANÉ OZNACENIA DERIVÁCIE V BODE:

$$[f(x)]'_{x=x_0} = \frac{df(x_0)}{dx} = \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x=x_0}$$

ZO STREDNEJ ŠKOLY VIENE URČIŤ ROVNICU PRIAMKY PRECHÁDZAJÚCEJ DVOCH BODMI POMOCOU SMERNICOVÉHO TVARU PRIAMKY:

$$P: y = kx + q$$

SMERNICA PRIAMKY

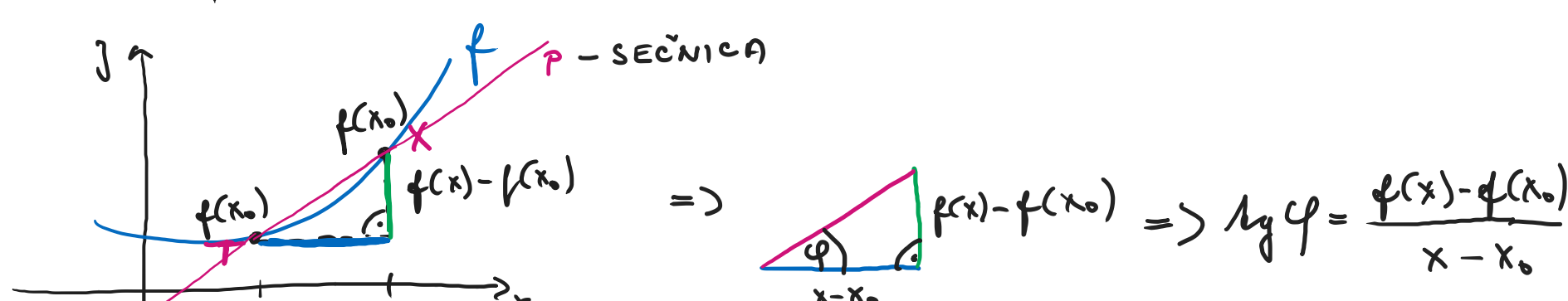
$$T = [x_0; f(x_0)] \quad P\text{-PRIAMKA PRECHÁDZ. BODMI } T \text{ A } X$$

$$\begin{aligned} T \in P: f(x_0) &= k \cdot x_0 + q \\ X \in P: f(x) &= k \cdot x + q \end{aligned} \Rightarrow \text{SÚSTAVA 2 ROVNÍC S 2 NEZNÁMYMI} \Rightarrow \text{ODČÍTANÍM}$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= k \cdot x - k \cdot x_0 \\ f(x) - f(x_0) &= k(x - x_0) \Rightarrow k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

GEOMETRICKÝ VÝZNAM DERIVÁCIE

- UŽ VIENE, ŽE DERIVÁCIA VYJADRUJE OKAMŽITÚ RÝCHLOSŤ ZMENY F-CIE



k_f JE V TOMTO PRÍPADE SMERNICA SECNICE

- AK SA x PŘIBLIŽÍ K x_0 , TAK k_f BUDE V TOMTO PRÍPADE SMERNICA DOTYČNICE K V BODE x_0 A $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

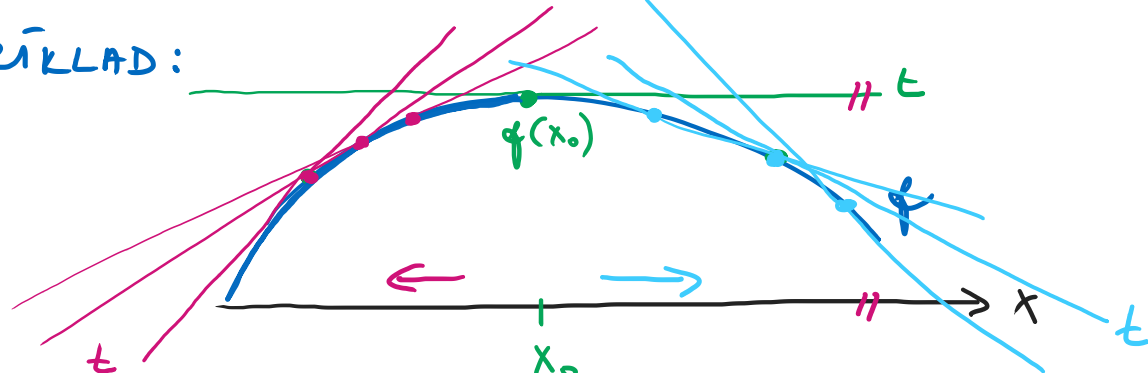
- TAKŽE $f'(x_0) = k_t$ V BODE $T = [x_0; f(x_0)]$ A BONUS $\therefore$ JE ROVNICA

DOTYČNICE KU GRAFU F-CIE f V BODE T ; t :

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

- SMERNICA DOTYČNICE ($f'(x_0)$) MÁM JAŇ ODPOVEDE, AKO SA SPRÁVA F-CIA V SÚVISLOSTI S MONOTONNOSŤOU F-CIE

PRÍKLAD:



V BODE $[x_0; f(x_0)]$ JE DOTYČNICA ROVNOBEŽNÁ S OŤOU o_x

NA INTERVALE VĽAVO OD BODU x_0 SÚ DOTYČNICE RASTÚCE, AJ FUNKCIA JE RASTÚCA

NA INTERVALE VPRAVO OD BODU x_0 SÚ DOTYČNICE KLESajúCE, AJ F-CIA JE KLESajúCA