! MOODLE !

1) 19. 2. 2026 → MAIL → POKYNY NA PRIHLÁSENIE DO KURZU FEI-KMTI-M2-ApI

2) STRÁNKA PREDMETU MAT 2-ApI → ZÁLOŽKA „OZNAMY"

TAYLOROV POLYNÓM

- POUŽÍVA SA NA APROXIMÁCIU (NAHRADENIE) AKEJ KOĽVEK F-CIE POLYNÓMOM
- NA OKOLÍ NEJAKÉHO BODU MÔŽE BYŤ GRAF TAYLOROVHO POLYNÓMU TAKMER TOTOŽNÝ S PÔVODNOU F-CIOU

VETA: NECH f JE V ISTOM OKOLÍ $O(x_0)$ BODU x_0 n-KRÁT DIFERENCOVATEĽNÁ (MÁ DERIVÁCIU n-TÉHO RÁDU). POTOM PRE AKÝKOĽVEK BOD $x \in O(x_0)$ PLATÍ

$$f(x) \approx T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^{k}$$

→ UMOCNENIE NA „k"

TAYLOROV POLYNÓM

k-TA DERIVÁCIA f-CIE

$$f(x) \approx T_n(x) = \underbrace{f(x_0)}_{a_0} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}}_{a_1}(x-x_0)^1 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{a_2}(x-x_0)^2 + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{a_n}(x-x_0)^n$$

PRÍKLAD: NAPÍŠME TAYLOROV POLYNÓM F-CIE $f(x) = e^x$ V BODE $x_0 = 0$.

BUDEME POTREBOVAŤ FUNKČNÚ HODNOTU A VŠETKY DERIVÁCIE V BODE x_0

$f(x) = e^x \Rightarrow f(x_0) = f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

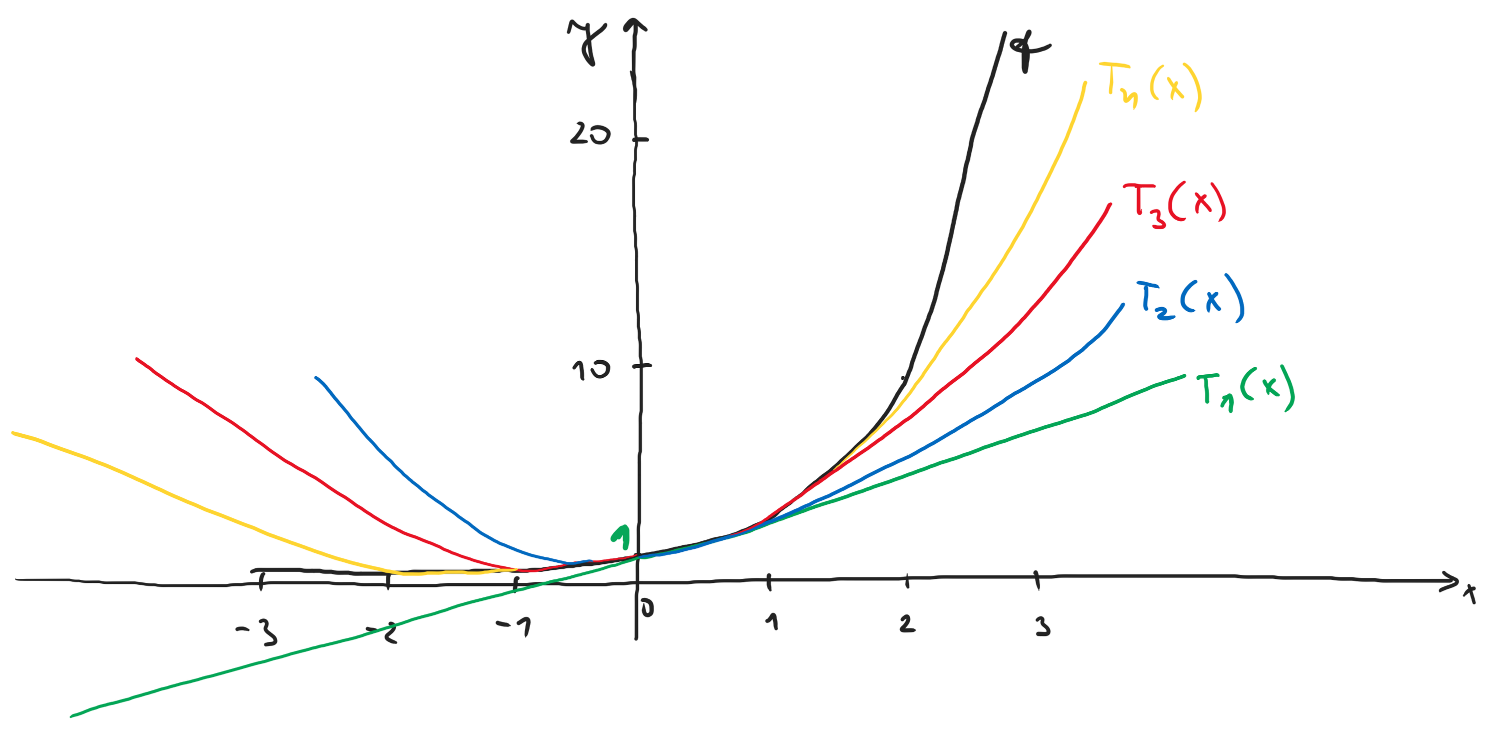
TAYLOROV POLYNÓM BUDE MAŤ TVAR:

$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(x-0)^n$ ALEBO

$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \frac{1}{n!}x^n$ ALEBO

$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

PRÍKLAD: POROVNAJME GRAF F-CIE $f(x) = e^x$ S TAYLOROVÝM POLYNÓMOM 1., 2., 3. A 4. STUPŇA



- ČÍM VYŠŠIEHO STUPŇA JE TAYLOROV POLYNÓM, TÝM JE APROXIMÁCIA F-CIE PRESNEJŠIA
- AK V SÚVISLOSTI S APROXIMOVANOU F-CIOU NÁM POSTAČUJE PRIBLIŽNÉ NAHRADENIE, TAYLOROV POLYNÓM JE POSTAČUJÚCI A VHODNÝ NAPR. NA INTEGROVANIE

PRÍKLAD: NAPÍŠME TAYLOROV POLYNÓM 3. STUPŇA F-CIE $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ V BODE $x_0 = e$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(e) = \frac{1-\ln e}{e^2} = \frac{0}{e^2} = 0$$

$$f''(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(0-\frac{1}{\cancel{x}}) \cdot x^{\cancel{2}} - (1-\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{-3x+2x\ln x}{x^4} = \frac{\cancel{x}(-3+2\ln x)}{x^{\cancel{4}}} = \frac{-3+2\ln x}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(e) = \frac{-3+2\ln e}{e^3} = \frac{-1}{e^3}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{-3+2\ln x}{x^3}\right)' = \frac{(\frac{2}{\cancel{x}}) \cdot (x^{\cancel{3}}) - (-3+2\ln x) \cdot (3x^2)}{x^6} = \frac{\overbrace{2x^2+9x^2}^{11x^2} - 6x^2\ln x}{x^6} = \frac{\cancel{x^2}(11-6\ln x)}{x^{\cancel{6}}} = \frac{11-6\ln x}{x^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(e) = \frac{11-6\ln e}{e^4} = \frac{5}{e^4}$$

$$T_4(x) = \frac{1}{e} + \frac{0}{\underbrace{1!}_{=1}}(x-e)^1 + \frac{\frac{1}{e^3}}{\underbrace{2!}_{=2}}(x-e)^2 + \frac{\frac{5}{e^4}}{\underbrace{3!}_{=6}}(x-e)^3$$ ALEBO

$$T_4(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^3}(x-e)^2 + \frac{5}{6e^4}(x-e)^3$$