

NMPaMŠ – 4.cvičenie

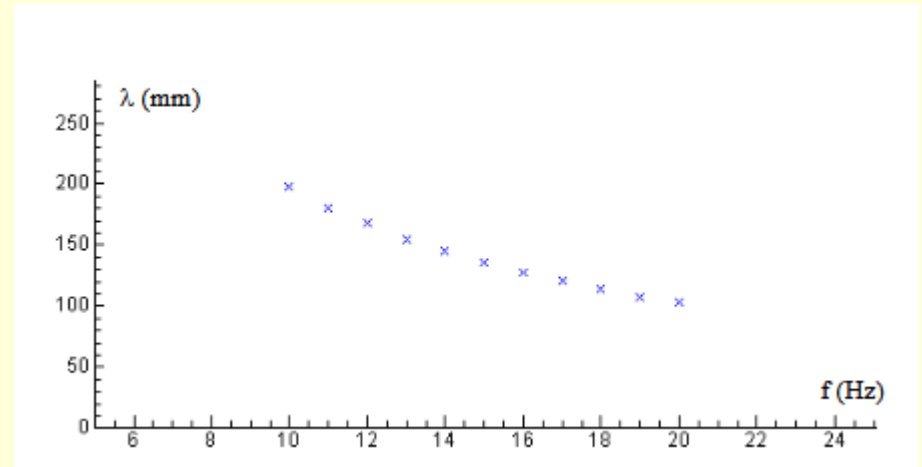
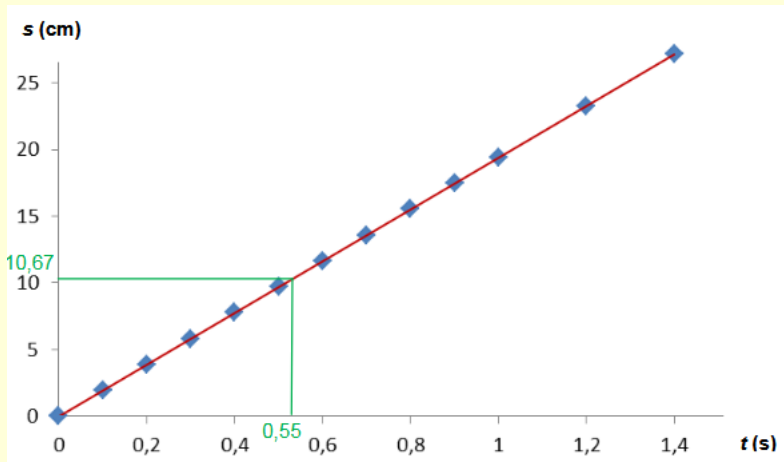
RNDr. Z. Gibová, PhD.

Aproximácia funkcií

Ak máme množinu hodnôt x_i , pre ktoré poznáme $f(x_i)$, a

- a) chceme poznať hodnotu $f(x_k)$ pre x_k , ktorý nie je z tejto množiny
- b) chceme viesť touto závislosťou **najvhodnejšiu funkciu**.

Hľadáme vhodnú **funkciu $g(x)$** , ktorou nahradíme funkciu $f(x)$. Tento proces sa nazýva **aproximácia**.



Dva spôsoby aproximácie: a) Lagrangeov interpolačný polynóm
b) metóda najmenších štvorcov

1. Lagrangeov interpolačný polynóm

Pri aproximácii funkcie $f(x)$ danej v $n + 1$ bodoch (daná tabuľkou) použijeme **Lagrangeov interpolačný polynóm** $g(x) = L_n(x)$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i)$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

x_i – uzlové body funkcie = $n + 1$

n – stupeň Lagrangeovho polynómu

Pr. 1: Zostrojte Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu $f(x)$, ktorá je daná tabuľkou.

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	2	4
$y_i = f(x_i)$	5	2	-4	-10

1. Určíme počet uzlových bodov $f(x)$ a stupeň LP

2. Zapišeme Lagrangeov polynóm

3. Vypočítame jednotlivé $l_i(x)$

4. Vypočítame Lagrangeov polynóm

Pr. 2: Zostrojte Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu $f(x)$, ktorá je daná tabuľkou a určte hodnotu funkcie v bode $x = 3$.

i	0	1	2
x_i	0	1	5
$y_i = f(x_i)$	2	3	147

počet uzlových bodov: $x_i = 3 = n + 1$ stupeň LP: $n = 2$

$$L_2(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2)$$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 5)}{(0 - 1)(0 - 5)} = \frac{x^2 - 6x + 5}{5}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 5)}{(1 - 0)(1 - 5)} = \frac{x^2 - 5x}{-4}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(5 - 0)(5 - 1)} = \frac{x^2 - x}{20}$$

$$L_2(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{5} \cdot 2 + \frac{x^2 - 5x}{-4} \cdot 3 + \frac{x^2 - x}{20} \cdot 147$$

$$L_2(x) = \frac{8x^2 - 48x + 40 - 15x^2 + 75x + 147x^2 - 147x}{20}$$

$$L_2(x) = \frac{140x^2 - 120x + 40}{20} = 7x^2 - 6x + 2$$

$$L_2(3) = 7 \cdot 9 - 6 \cdot 3 + 2 = 47$$

2. Metóda najmenších štvorcov

Metóda najmenších štvorcov umožňuje pomocou nameraných hodnôt $y(x)$ vypočítať parametre funkcie $g(x) = \varphi(x)$, ktorou budeme aproximovať nameraného hodnoty.

Funkcia, ktorou budeme aproximovať

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_k\varphi_k(x) \quad \text{kde } k = 0, 1, 2, \dots$$

pre $k = 1$ (funkcia $y(x)$ má dva parametre a_0, a_1)

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i)$$

Sústava rovníc

$$\begin{aligned} a_0 \cdot \sum_{i=0}^n \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^n \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) &= \sum_{i=0}^n y_i\varphi_0(x_i), \\ a_0 \cdot \sum_{i=0}^n \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^n \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) &= \sum_{i=0}^n y_i\varphi_1(x_i). \end{aligned}$$

Pri použití MNŠ porovnáваме danú funkciu $\varphi(x)$, ktorou máme aproximovať odmeranú závislosť $y(x)$ so všeobecným predpisom funkcie

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) .$$

zistíme, čomu sa rovnajú jednotlivé členy:

napr. $y(x) = a_0x + a_1$

$$\varphi_0(x_i) = x_i$$

$$\varphi_1(x_i) = 1$$

$$\varphi(x) = y_i$$

Pr. 3: Pre hodnoty zadané tabuľkou, určte metódou najmenších štvorcov optimálne hodnoty parametrov a_0 a a_1 v závislosti $y(x) = a_0 + a_1 \sin x$.

i	0	1	2
x_i	1	3	4
$y_i = y(x_i)$	6	2	1

1. Určíme počet parametrov vo funkcii $y(x)$ a zapíšeme funkciu $\varphi(x)$, ktorou budeme aproximovať.
2. Porovnáme funkciu $\varphi(x)$ s danou funkciou $y(x)$.
3. Napíšeme sústavu rovníc pre danú funkciu = počet parametrov.
4. Vypočítame jednotlivé sumy.
5. Zostavíme sústavu rovníc a vypočítame hodnoty parametrov.
6. Zapíšeme funkciu $y(x) = \varphi(x)$ s vypočítanými parametrami.

Pr. 4: Napíšte sústavu rovníc pre určenie parametrov a_0 a a_1 pomocou metódy najmenších štvorcov pre funkciu $y(x) = a_0x^2 + a_1\frac{1}{x}$ danú tabuľkou

i	0	1	2
x_i	1	2	5
$y_i = f(x_i)$	2	4	10

1. Určíme počet parametrov vo funkcii $y(x)$ a zapíšeme funkciu $\varphi(x)$, ktorou budeme aproximovať

2 parametre - a_0, a_1 , $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$

2. Porovnáme funkciu $\varphi(x)$ s danou funkciou $y(x)$

$$y(x) = a_0x^2 + a_1\frac{1}{x}$$
$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$$

$$\varphi_0(x) = x^2, \varphi_1(x) = \frac{1}{x}$$

3. Napíšeme sústavu rovníc pre danú funkciu = počet parametrov.

$$a_0 \sum_{i=0}^2 \varphi_0(x) \cdot \varphi_0(x) + a_1 \sum_{i=0}^2 \varphi_0(x) \cdot \varphi_1(x) = \sum_{i=0}^2 y_i \cdot \varphi_0(x)$$

$$a_0 \sum_{i=0}^2 x_i^4 + a_1 \sum_{i=0}^2 x_i^2 \frac{1}{x_i} = \sum_{i=0}^2 y_i \cdot x_i^2$$

$$a_0 \sum_{i=0}^2 \varphi_0(x) \cdot \varphi_1(x) + a_1 \sum_{i=0}^2 \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(x) = \sum_{i=0}^2 y_i \cdot \varphi_1(x)$$

$$a_0 \sum_{i=0}^2 x_i^2 \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=0}^2 \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=0}^2 y_i \cdot \frac{1}{x_i}$$

4. Vypočítame jednotlivé sumy.

$$\sum_{i=0}^2 x_i^4 = 1^4 + 2^4 + 5^4 = 642 \quad \sum_{i=0}^2 y_i \cdot x_i^2 = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 10 \cdot 25 = 268$$

$$\sum_{i=0}^2 y_i \cdot \frac{1}{x_i} = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{10}{5} = 6 \quad \sum_{i=0}^2 \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} = 1,29 \quad \sum_{i=0}^2 x_i^2 \frac{1}{x_i} = \sum_{i=0}^2 x_i = 1 + 2 + 5 = 8$$

5. Zostavíme sústavu rovníc

$$a_0 642 + a_1 8 = 268$$

$$a_0 8 + a_1 1,29 = 6$$

Dú: Príklady na riešenie 1: C / 1 – 5, D / 1 - 8