

NMPaMŠ – 3.cvičenie

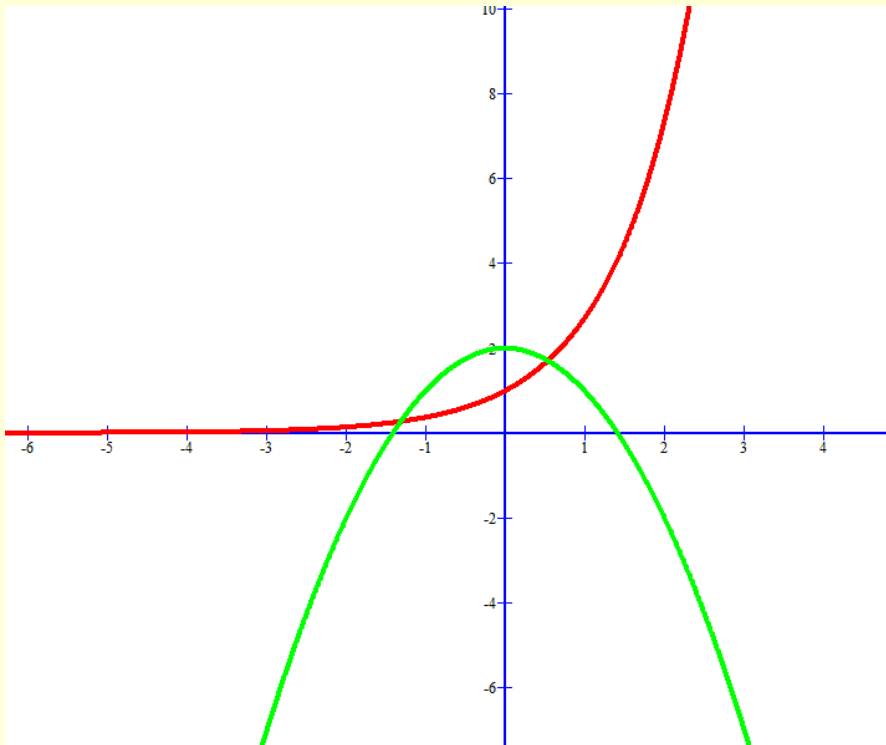
RNDr. Z. Gibová, PhD.

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

2. Newtonova metóda

Pr. 3: Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $e^x + x^2 - 2$. Všetky korene určte pomocou Newtonovej metódy s presnosťou $\varepsilon = 0,001$.

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa



2. Overíme, či $\alpha \in \langle a, b \rangle$ väčší koreň

$$\alpha \in \langle a, b \rangle, \text{ ak } f(a) \cdot f(b) < 0$$

3. Určime prvú a druhú deriváciu funkcie $f(x)$

4. Overíme, či prvá a druhá derivácia funkcie $f(x)$ zachováva na intervale $\langle a, b \rangle$ znamienko

Poznámka: Newtonovu metódu môžeme použiť, ak funkcia $f(x)$ je dvakrát diferencovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a je na danom intervale konvexná alebo konkávna

5. Zvolíme štartovací bod $x_0 \in \langle a, b \rangle$, pre ktorý má platiť $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

6. Zvolíme iteračný proces $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

7. Určíme podmienku ukončenie - ak platí, že prvá derivácia **nemení** na intervale znamienko, podmienka ukončenia

$$\frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$$

$$m = \min_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$$

Poznámka: Ak prvá derivácia **mení** na intervale **znamienko**, podmienka ukončenia

$$f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0$$

n	x_n	$f(x_n)$ $e^x + x^2 - 2$	$f'(x_n)$ $e^x + 2x$	$\frac{ f(x_n) }{m} < \varepsilon$ $\frac{ f(x_n) }{1} < 0,001$
0	1	1,7183	4,7183	1,7183 > 0,001
1				
2				
3				
4				

8. Aproximujeme koreň pomocou iterácie x_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.

Dú: Pr. 3 – dokončiť pre menší koreň
príklady na riešenie 1: A / 1-10

Riešenie sústav nelineárnych rovníc

Newtonova iteračná metóda

sústava rovníc

$$f_1(x, y) = 0$$

$$f_2(x, y) = 0$$

po úpravách

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} (x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f_1}{\partial y} (y^{(k+1)} - y^{(k)}) &= -f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} (x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f_2}{\partial y} (y^{(k+1)} - y^{(k)}) &= -f_2 \end{aligned}$$

Neznáme $(x^{(k+1)} - x^{(k)})$, $(y^{(k+1)} - y^{(k)})$, k – iterácia ($k = 0, 1, 2, \dots$)

Cramerovo pravidlo pre riešenie sústavy

$$W_1^{(k)} = \begin{vmatrix} -f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ -f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$W_2^{(k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & -f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & -f_2 \end{vmatrix}$$

$$W^{(k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Pr. 1: Newtonovou iteračnou metódou s presnosťou $\varepsilon = 0,05$ riešte sústavu nelineárnych rovníc $f_1: xy - x + 1 = 0, f_2: 2x^2 + y - 3 = 0$ z počiatočného bodu $x^{(0)} = 1, y^{(0)} = 0$.

1. Zapišeme sústavu rovníc $f_1(x, y), f_2(x, y)$, určíme $-f_1(x, y), -f_2(x, y)$, urobíme ich parciálne derivácie podľa x a y
2. Pomocou Cramerovho pravidla určíme determinanty $W^{(k)}, W_1^{(k)}, W_2^{(k)}$
3. Hodnoty neznámych $x^{(k+1)}, y^{(k+1)}$ sú určené iteračným procesom

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{W_1^{(k)}}{W^{(k)}}$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{W_2^{(k)}}{W^{(k)}}$$

4. Iteračný proces ukončíme

a) ak je daná presnosť ε

$$\|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{(k)}\| = \max\{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|, |y^{(k+1)} - y^{(k)}|\} < \varepsilon$$

b) ak je daný počet iterácií k

potom chyba výpočtu $\max\{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|, |y^{(k+1)} - y^{(k)}|\}$

5. Hodnoty zapíšeme do tabuľky

k	$\mathbf{x}^{(k)}$	$\mathbf{y}^{(k)}$	$\mathbf{W}_1^{(k)}$	$\mathbf{W}_2^{(k)}$	$\mathbf{W}^{(k)}$	$\ \bar{\mathbf{x}}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(k)}\ < \varepsilon$

6. Aproximujeme neznáme hodnotami $\mathbf{x}^{(K)}, \mathbf{y}^{(K)}$

Pr. 2 - sp B2: Newtonovou iteračnou metódou riešte danú sústavu rovníc

$$f_1: 9x^2 + y^2 - 10 = 0$$

$f_2: 2xy + 4y - 5 = 0$ z počiatočného bodu $x^{(0)} = 1, y^{(0)} = 0,5$. Urobte jednu iteráciu a určte chybu výpočtu.

$$f_1(x, y) = 9x^2 + y^2 - 10$$

$$-f_1(x, y) = -9x^2 - y^2 + 10$$

$$f_2(x, y) = 2xy + 4y - 5$$

$$-f_2(x, y) = -2xy - 4y + 5$$

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = 18x \quad \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = 2y \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 2x + 4$$

$$W_1^{(k)} = \begin{vmatrix} -9x^2 - y^2 + 10 & 2y \\ -2xy - 4y + 5 & 2x + 4 \end{vmatrix}$$

$$W^{(k)} = \begin{vmatrix} 18x & 2y \\ 2y & 2x + 4 \end{vmatrix}$$

$$W_2^{(k)} = \begin{vmatrix} 18x & -9x^2 - y^2 + 10 \\ 2y & -2xy - 4y + 5 \end{vmatrix}$$

$$W_1^{(k)} = \begin{vmatrix} -9x^2 - y^2 + 10 & 2y \\ -2xy - 4y + 5 & 2x + 4 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1}, \mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{0,5}$$

$$W_1^{(0)} = \begin{vmatrix} 0,75 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2,5$$

$$W_2^{(k)} = \begin{vmatrix} 18x & -9x^2 - y^2 + 10 \\ 2y & -2xy - 4y + 5 \end{vmatrix}$$

$$W_2^{(0)} = \begin{vmatrix} 18 & 0,75 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 35,25$$

$$W^{(k)} = \begin{vmatrix} 18x & 2y \\ 2y & 2x + 4 \end{vmatrix}$$

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 107$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \frac{W_1^{(0)}}{W^{(0)}} = 1 + \frac{2,5}{107} = 1,023$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \frac{W_2^{(0)}}{W^{(0)}} = 0,5 + \frac{35,25}{107} = 0,829$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$w_1^{(k)}$	$w_2^{(k)}$	$w^{(k)}$
0	1	0,5	2,5	35,25	107
1	1,023	0,829			

$$\max\{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|, |y^{(k+1)} - y^{(k)}|\}$$

$$\max\{|1,023 - 1|, |0,829 - 0,5|\} = \max\{|-0,023|, |0,329|\} = 0,329$$

$x \approx 1,023, y \approx 0,829$ s chybou 0,329

Pr. 3 - sp B5: Newtonovou iteračnou metódou riešte danú sústavu rovníc:

$$f_1: x^2y - xy + 1 = 0$$

$f_2: y^3 - 3xy + 5 = 0$ z počiatočného bodu $x^{(0)} = 2, y^{(0)} = 1$ Urobte jednu iteráciu.

$$f_1(x, y) = x^2y - xy + 1$$

$$-f_1(x, y) = -x^2y + xy - 1$$

$$f_2(x, y) = y^3 - 3xy + 5$$

$$-f_2(x, y) = -y^3 + 3xy - 5$$

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = 2xy - y$$

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = x^2 - x$$

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = -3y$$

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

$$W^{(k)} = \begin{vmatrix} 2xy - y & x^2 - x \\ -3y & 3y^2 - 3x \end{vmatrix}$$

$$W_1^{(k)} = \begin{vmatrix} -x^2y + xy - 1 & x^2 - x \\ -y^3 + 3xy - 5 & 3y^2 - 3x \end{vmatrix}$$

$$W_2^{(k)} = \begin{vmatrix} 2xy - y & -x^2y + xy - 1 \\ -3y & -y^3 + 3xy - 5 \end{vmatrix}$$

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 & 2^2 - 2 \\ -3 \cdot 1 & 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \end{vmatrix} \quad x^{(0)} = 2, y^{(0)} = 1$$

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 6 = -3$$

$$W_1^{(0)} = \begin{vmatrix} -2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 & 2 \\ -1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9$$

$$W_2^{(0)} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot -1 & -3 \\ -3 \cdot 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 9 = -9$$

k	x^(k)	y^(k)	W₁^(k)	W₂^(k)	W^(k)
0	2	1	9	-9	-3
1	-1	4			

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \frac{W_1^{(0)}}{W^{(0)}} = 2 + \frac{9}{-3} = -1 \quad y^{(1)} = y^{(0)} + \frac{W_2^{(0)}}{W^{(0)}} = 1 + \frac{-9}{-3} = 4$$

Dú: Príklady na riešenie 1: B / 1 - 5