

NMPaMŠ – 5.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Numerický výpočet určitého integrálu

Pri výpočte integrálu

$$\int_a^b f(x)dx$$

kde $a < b$ a $f(x)$ je integrovateľná na $I = \langle a, b \rangle$, rozdelíme interval I na n **intervalov rovnakej dĺžky** medzi uzlovými bodmi a, b :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{s konštantným krokom: } h = \frac{b-a}{n}$$

1. Lichobežníková metóda

Pri tejto metóde je

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

nahradený obsahom lichobežníka so základňami $f(x_i), f(x_{i+1})$ a výškou h , nazývame ho **elementárny vzorec**.

Pr. 1: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 0,009$.

$$\int_1^4 \frac{1}{(1 + 4x)^3} dx$$

1. Zvolíme interval $\langle a, b \rangle$, vypočítame hodnotu M_2 a horný odhad chyby pre určenie delenia n intervalu.

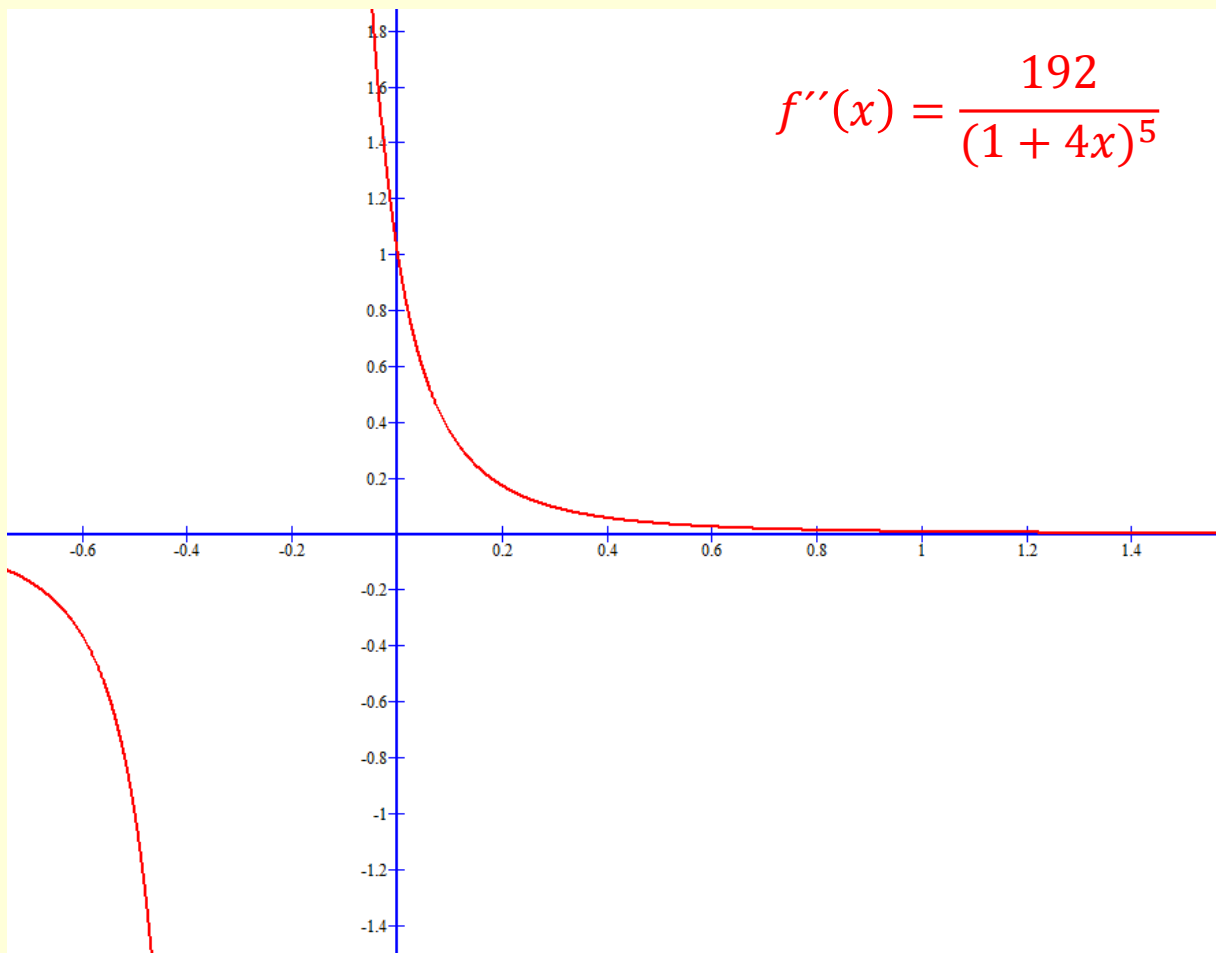
$$M_2 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|$$

Poznámka: M_2 môžeme rátať, iba ak je $f''(x)$ monotónna na danom intervale (rastúca alebo klesajúca), v tomto prípade je klesajúca, potom stačí urobiť výpočet pre $x = 1$.

horný odhad chyby

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b - a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon$$

2. Určíme n delení intervalu a krok delenia h .



$f''(x)$ je monotónna (klesajúca) na danom intervale

3. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme x_i , $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$f(x_i) = \frac{1}{(1 + 4x_i)^3}$$

4. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x) dx \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

5. Zapišeme výsledek

2. Simpsonova metóda

Pri tejto metóde je

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + 2f(x_{i+2})]$$

nazývame ho **elementárny vzorec**.

Pr. 2: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou pre $n = 6$ delení a urobte odhad chyby výpočtu.

$$\int_{0,1}^{0,34} x \cdot e^{2x} dx$$

1. Vypočítame krok delenia h pomocou n delenia intervalu $\langle a, b \rangle$. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme x_i , $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

2. Vypočítáme integrál

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx S(n) = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]$$

3. Vypočítáme M_4

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(4)}(x)|$$

4. Určíme horný odhad chyby

$$|R_s(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4}$$

5. Zapišeme výsledek

Pr. 3: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou, ak je dané $n = 6$ a odhadnite chybu výpočtu. V tabuľke zaokrúhľujte na 4 desatinné miesta.

$$\int_4^{6,4} \ln x \, dx$$

1. Vypočítame krok delenia h pomocou n delenia intervalu $\langle a, b \rangle$.
Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme $x_i, f(x_i)$

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{6,4 - 4}{6} = 0,4$$

$$x_{i+1} = x_i + 0,4$$
$$x_1 = x_0 + 0,4 = 4 + 0,4 = 4,4$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	$a \rightarrow 4$	1,3863
1	4,4	1,4816
2	4,8	1,5686
3	5,2	1,6487
4	5,6	1,7228
5	6	1,7918
6	$b \rightarrow 6,4$	1,8563

$$f(x_i) = \ln x_i$$

$$\sum_{i=1}^5 f(x_i) = 8,2135$$

2. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x) dx \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

$$L(6) = \frac{0,4}{2} [1,3863 + 1,8563 + 2 \cdot (8,2135)]$$

$$L(6) = 3,93392$$

3. Vypočítame hodnotu M_2 a horný odhad chyby

$$M_2 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$M_2 \geq \max_{x \in \langle 4, 6, 4 \rangle} \left| \frac{-1}{x^2} \right| \quad x = 6,4, M_2 = 0,0244$$
$$x = 4, M_2 = 0,0625$$

M_2 môžeme rátať, $f''(x)$ je klesajúca na danom interval

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{(6,4-4)^3}{12 \cdot 6^2} 0,065 = 0,002$$

4. Zápis výsledku

$$L(6) = 3,934 \text{ s chybou } 0,002$$

Porovnanie výsledku: výpočet cez per partes

$$\int_4^{6,4} \ln x \, dx = [x \ln x]_4^{6,4} - \int_4^{6,4} \frac{1}{x} x \, dx = [x \ln x]_4^{6,4} - [x]_4^{6,4} = 5,4803 - 1,5452 = 3,9351$$

$$\int_4^{6,4} \ln x \, dx = 3,935$$

Zo zápisu výsledku vyplýva, že

$L(6) = 3,934$ sa má líšiť od 3,935 najviac o 0,002

$$\text{overenie } 3,933925 - 3,9351 = 0,00118$$

Pr. 4: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5}$.
V tabuľke zaokrúhľujte na 5 desatinných miest.

$$\int_0^1 e^x dx$$

1. Zvolíme interval $\langle a, b \rangle$, vypočítame hodnotu M_4 a horný odhad chyby pre určenie delenia n intervalu

$$a = 0, b = 1$$

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(4)}(x)|$$

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |e^x| = 2,71828$$

$$f(x) = e^x$$

M_4 môžeme rátať, $f^{(4)}(x)$ je rastúca na danom intervale, stačí výpočet pre $x = 1$

$$f^4(x) = e^x$$

$$|R_s(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4} < \varepsilon$$

$$\frac{(1-0)^5 \cdot 2,71828}{180 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = n^4$$

$$\frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot \varepsilon} = n^4$$

$$755,08 = n^4$$

$$5,24 = n \rightarrow \mathbf{n = 6} \text{ najbližšie celé číslo nahor}$$

2. Určíme n delení intervalu a krok delenia h.

$$a = 0, b = 1, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$$

3. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme x_i , $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	1/6	1,18136
2	2/6	1,39561
3	3/6	1,64872
4	4/6	1,94773
5	5/6	2,30098
6	1	2,71828

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$x_1 = 0 + \frac{1}{6}$$

$$f(x_i) = e^{x_i}$$

4. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(n) = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]$$

$$S(6) = \frac{1}{18} [1 + 2,71828 + 4 \cdot 1,18136 + 2 \cdot 1,39561] = 1,718288889 \quad S(6) = 1,71829$$

5. Zapišeme výsledok

$$S(6) = 1,71829 \text{ s presnosťou } \varepsilon = 2 \cdot 10^{-5}$$

Porovnanie výsledku: výpočet cez Leibnitza

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = 2,718281828 - 1 = 1,718281828$$

Zo zápisu výsledku vyplýva, že

$S(6) = 1,718288889$ sa má líšiť od $1,718281828$ najviac o $2 \cdot 10^{-5}$

overenie $1,718288889 - 1,718281828 = 0,000007061$

Dú:Príklady na riešenie 1: E / 1 – 5, F / 1 - 5