

NMPaMŠ – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Kombinatorika

Princíp násobenia

Ak činnosť pozostáva z k krokov po sebe nasledujúcich a prvý krok môže byť uskutočnený n_1 spôsobmi, druhý krok môže byť uskutočnený n_2 spôsobmi,
 $\vdots$
 k -ty krok môže byť uskutočnený n_k spôsobmi,
tak počet rôznych spôsobov vykonania činnosti je $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Princíp sčítania

Majme množiny $A_1, A_2, \dots, A_k$, ktoré sú po dvojiciach disjunktné. Nech $|A_i| = n_i$.
Potom $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Permutácie

Permutácie sú usporiadané n -tice prvkov n -prvkovej množiny. Ak sú všetky prvky navzájom rôzne, jedná sa o **permutácie bez opakovania**. Ak sú niektoré prvky množiny rovnaké, jedná sa o **permutácie s opakovaním**.

Počet permutácií n -tej triedy bez opakovania je

$$P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Počet permutácií n -tej triedy s opakovaním je

$$P'_{n_1, n_2, \dots, n_c}(n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_c!} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_c = n)$$

Variácie

Variácie sú usporiadané k -tice z n navzájom rôznych prvkov. Rozoznávame **variácie bez opakovania** a **variácie s opakovaním**.

Počet variácií k -tej triedy z n prvkov ($k \leq n$) je

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

V prípade $n = k$ dostávame permutácie.

Počet variácií k -tej triedy z n prvkov s opakovaním je

$$V'(n, k) = n^k.$$

Pri variáciách s opakovaním môže byť $k > n$.

Závisí na poradí prvkov.

Kombinácie

Kombinácie sú podmnožiny danej veľkosti odobraté z daného vstupného súboru. Počet prvkov súboru označíme n a počet prvkov podmnožiny označíme k . Počet kombinácií z n prvkov k -tej triedy ($k \leq n$) je

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Ak $n = k$, dostávame $C(n, n) = 1$.

Nezávisí na poradí prvkov.

Pre kombinačné čísla platí:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n.$$

Pr. 1 – K2: Na policičke treba rozostaviť vedľa seba 3 zelené, 2 červené a 2 žlté hrnčeky.

- Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť?
- Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak hrnčeky rovnakej farby stoja vedľa seba?
- Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak hrnčeky rovnakej farby stoja vedľa seba, ak navyše jeden červený hrnček má uško a druhý nie?

b) ako tri prvky (celky)

Z Z Z C C Z Z
1 2 3 4 5 6 7



□ □ □ □ □ □ □
1 2 3

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Pr. 2 – K7: Koľko je párnych prirodzených čísel, v zápise ktorých sa vyskytujú cifry 2, 3, 4, 5 iba raz?

Pr. 3 – K8: Koľko je 4 – ciferných prirodzených čísel deliteľných 4, v ktorých sa vyskytujú iba číslice 1, 2, 3, 4, 5 a každé z nich sa môže ľubovoľne opakovať.

číslo je deliteľné 4, ak jeho posledné dvojčíslicie je deliteľné 4

cifry 1, 2, 3, 4, 5

výber štvoríc z 5 cifier - variácie

 12, 24, 32, 44, 52 – je ich 5 = n_1

vyberáme 5 cifier na 2 miesta, môžu sa opakovať = variácie s opakovaním

$$n_2 = V'(5,2) = 5^2 = 25$$

5 možností
5 5

spolu - počet všetkých 4 - ciferných prirod. čísel deliteľných 4

$$n = n_1 \cdot n_2 = 5 \cdot 25 = 125$$

Pr. 4 – K14: Hokejový zápas sa skončil víťazstvom domácich 11:7, pričom po 1. tretine bol stav 4:6, po druhej 9:7. Koľko rôznych priebehov mohol mať tento zápas z hľadiska domácich?

Pravdepodobnosť

Klasická pravdepodobnosť

Jav (A) - výsledok pokusu, ktorý je možné opakovať za určitých podmienok niekoľkokrát

Istý jav I , nemožný jav $\emptyset$.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Pravdepodobnosť javu A

$$P(A) = \frac{\text{počet všetkých možných priaznivých výsledkov javu } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu}}$$

Pre istý a nemožný jav je $P(I) = 1$ a $P(\emptyset) = 0$.

Pre opačný jav platí $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Žiadny = znamená 0 a nie viac

Najviac 3 = znamená 0, 1, 2, 3 a nie viac

Aspoň 2 = znamená dva a viac

Najmenej 5 = znamená 5 a viac

Pr. 1 - P1: Na policičke je náhodne rozostavených 20 rôznych kníh, medzi ktorými sú 4 knihy o počítačoch. Aká je pravdepodobnosť, že tieto štyri knihy sú postavené vedľa seba?

Pr. 2 - P2: Každá z troch krabíc obsahuje 10 lístkov očíslovaných od 1 do 10. Z každej krabice je náhodne vytiahnutý jeden lístok. Určte pravdepodobnosť toho, že súčet čísel na vytiahnutých lístkoch je väčší ako 4?

Pr. 3 – P3: Máme 10 vstupeniek po 200 eur, 3 vstupenky po 300 eur a 2 vstupenky po 500 eur. Náhodne vyberieme 3 vstupenky. Určte pravdepodobnosť, že aspoň dve z týchto vstupeniek budú mať rovnakú cenu?

Pr. 4 - P4: Zo sady 32 kariet vyberieme náhodne 5 kariet.

Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi nimi budú aspoň tri karty s rovnakým znakom?

n - výber 5 kariet z 32 kariet (8 kariet $\times$ 4 farby)

A - vo výbere 5 kariet budú aspoň 3 rovnakej farby. (3 a viac = 3 a 4 a 5)

$$m = \left[\underbrace{\binom{8}{3} \binom{24}{2}}_{\substack{3 \text{ karty} \\ \text{rovnakej} \\ \text{farby}}} + \underbrace{\binom{8}{4} \binom{24}{1}}_{\substack{4 \text{ karty} \\ \text{rovnakej} \\ \text{farby}}} + \underbrace{\binom{8}{5} \binom{24}{0}}_{5 \text{ kariet}} \right] \cdot 4 \text{ rôzne farby}$$

$$m = 68768$$

$$n = C(32, 5) = \frac{32!}{5! 17!} = 201376$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{68768}{201376}$$

$$P(A) = 0,3415$$

Dů – všechny příklady z kombinatoriky