METÓDA PER PARTES

(neurčitý integrál $\int f(x)dx = F(x) + C$
$F(x)$ – primitívna f. k $f(x)$)
$F'(x) = f(x)$
f spojitá funkcia, kvôli existencii

VETA Nech funkcie $u(x)$, $v(x)$ majú spojité deriváciu na intervale J. Potom na J platí

$$\boxed{\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx}.$$

Dôkaz: nech funkcia $H(x)$ je primitívna k $u'(x).v(x)$ na J.
Teda $H'(x) = u'(x).v(x)$, resp. $\int u'(x)v(x)dx = H(x)+C$.

Počítajme deriváciu $\left[u(x).v(x) - H(x)\right]' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x) - H'(x) =$

$$= \cancel{u'(x).v(x)} + u(x).v'(x) - \cancel{u'(x).v(x)} = u(x).v'(x),$$

teda $u(x).v(x) - H(x)$ je primitívna k $u(x).v'(x)$, teda

$$\boxed{\int u(x).v'(x)dx} = u(x).v(x) - H(x) = \boxed{u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx}$$

príklady:

① $\int (2x+1).e^x dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+1 & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{matrix} \right| = (2x+1).e^x - \int 2e^x dx =$
$= (2x+1).e^x - 2e^x + C$;

② $\int x^2.\cos(3x)dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & v' = \cos(3x) \\ u' = 2x & v = \frac{\sin(3x)}{3} \end{matrix} \right| = x^2.\frac{\sin(3x)}{3} - \int 2x.\frac{\sin(3x)}{3}dx = *$

$u.v \quad - \int u'.v\,dx$

$\left\{ \int \cos(3x)dx = \frac{\sin 3x}{3} + C \right\}$
lebo $\left(\frac{1}{3}\sin(3x)\right)' = \frac{1}{3}.\cos(3x).3 = \cos 3x$

$\int e^{5x}dx = \frac{e^{5x}}{5} + C$

$\left(\frac{e^{5x}}{5}\right)' = \frac{e^{5x}}{5}.5 = e^{5x}$

platí $\left\{ \begin{aligned} &\int \cos(kx)dx = \frac{\sin(kx)}{k} + C \\ &\int \sin(kx)dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + C \\ &\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k} + C \end{aligned} \right\}$

$* = \frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\boxed{\int x.\sin(3x)dx} = \left| \begin{matrix} u = x & v' = \sin(3x) \\ u' = 1 & v = -\frac{\cos(3x)}{3} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\left[x.\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right) - \int -\frac{\cos(3x)}{3}dx\right]$

ešte raz použijeme P.P. per partes

$$= \frac{x^2}{3}\sin(3x) + \frac{2}{9}x.\cos(3x) - \frac{2}{9}\int \cos(3x)dx = \frac{x^2}{3}\sin(3x) + \frac{2}{9}x.\cos(3x) - \frac{2}{9}.\frac{\sin(3x)}{3} + C$$

všeobecne:
$$\boxed{\begin{aligned} &\int P_n(x).e^{kx}dx \\ &\int P_n(x).\sin(kx)dx \\ &\int P_n(x).\cos(kx)dx \end{aligned}}$$
← používame metódu per partes, kde derivujeme polynóm, teda $u(x) = P_n(x)$.

③ $\int x^3.\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \cancel{x^3} & v' = \cancel{\ln x} \\ u' = 3x^2 & v = ??? \end{matrix} \right|$ nepoužijem takúto voľbu, ale $\left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = x^3 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| =$

$$= \frac{x^4}{4}.\ln x - \int \frac{1}{x}.\frac{x^4}{4}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}.\frac{x^4}{4} + C;$$

$u.v$ (resp. $v.u$) $\quad \int u'.v\,dx$

④ $\int 1.\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{matrix} \right| = x.\ln x - \int \frac{1}{x}.x\,dx = x\ln x - \int 1dx = x.\ln x - x + C$;

⑤ metódou P.P sa počítajú aj $\int 1.\arcsin x\,dx$, $\int 1.\arccos x\,dx$, $\int 1.\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int 1.\mathrm{arccotg}\,x\,dx$

$\int 1.\arcsin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{matrix} \right| = x.\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{matrix} \text{substitúcia:} \\ 1-x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \\ x\,dx = -\frac{dt}{2} \end{matrix} \right| =$

$$= x.\arcsin x - \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}.\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$\int t^{-\frac{1}{2}}dt$

$$= x.\arcsin x + \sqrt{t} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

všeobecne integrály typu
$$\boxed{\begin{aligned} &\int P_n(x).\ln x\,dx \\ &\int P_n(x).\arcsin x\,(\arccos x)dx \\ &\int P_n(x).\mathrm{arctg}\,x\,(\mathrm{arccotg}\,x)dx \end{aligned}}$$
riešime metódou per partes, kde polynóm integrujeme. $v' = P_n(x)$

kde $P_n(x)$ môže byť aj konštanta 1.

⑥ $\boxed{\int e^x.\sin x\,dx} = \left| \begin{matrix} u = \sin x & v' = e^x \\ u' = \cos x & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x.\sin x - \boxed{\int e^x.\cos x\,dx} = \left| \begin{matrix} u = \cos x & v' = e^x \\ u' = -\sin x & v = e^x \end{matrix} \right|$

ani prvý, ani druhý typ

ešte raz P.P.

$$= e^x.\sin x - \left[e^x.\cos x - \int(-\sin x).e^x dx\right] =$$

$$\boxed{= e^x.\sin x - e^x.\cos x - \int e^x.\sin x\,dx} \quad \Big| + \int e^x\sin x\,dx$$

vyjadrím z rovnice neznámy integrál

$$2\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x + C$$

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

rovnako počítame aj $\boxed{\int e^x.\cos x\,dx}$

INTEGROVANIE RACIONÁLNYCH FUNKCIÍ

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

rýdzoracionálna $n < m$

nerýdzoracionálna $n \geq m$

viem deliť $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \boxed{\frac{R(x)}{Q_m(x)}}$ ← rýdzoracionálna

príklady: (priamo integračné vzorce
$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
$\int \frac{2}{2x-3}dx = \ln|2x-3| + C$ $\quad$ (f', f)
$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \mathrm{arctg}\,x + C$
$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln|x^2+x+1| + C$

Každú rýdzoracionálnu f. viem rozložiť na SÚČET PARCIÁLNYCH ZLOMKOV.

počítajme: $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \left[\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} \cdots + \frac{\square}{\square}\right]dx = \int \frac{\square}{\square}dx + \int \frac{\square}{\square}dx + \dots$

ak je rýdzoracion.

z hľadiska integrovania potrebujem vedieť integrovať parciálne zlomky

$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int S(x) + \boxed{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}}dx = \int S(x)dx + \underbrace{\int \left[\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \dots \frac{\square}{\square}\right]dx}_{\text{integrovať parc. zlomky}}$

ak je nerýdzora. $\quad$ polynóm $\quad$ rýdza $\quad$ v pohode

ZÁVER ÚVAH: potrebujeme vedieť „IBA" integrovať parciálne zlomky.

INTEGROVANIE PARCIÁLNYCH ZLOMKOV:

① $\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\int \frac{1}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha| + C$ $\quad$ (f', f)

príklad: $\int \frac{2}{x+3}dx = 2\ln|x+3| + C$

② $\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}dx = A\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}dx = \left| \begin{matrix} \text{použijeme substitúciu} \\ x-\alpha = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = A\int t^{-n}dt = A.\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{1-n}(x-\alpha)^{1-n} + C$

príklad: $\int \frac{3}{(x-4)^5}dx = 3\int \frac{1}{(x-4)^5}dx = \left| \begin{matrix} x-4 = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = 3\int \frac{1}{t^5}dt = 3\int t^{-5}dt =$

$$= 3\frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{3}{4}.(x-4)^{-4} + C = -\frac{3}{4}.\frac{1}{(x-4)^4} + C$$

③ $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ $\quad$ kde $p^2-4q<0$, $p^2<4q$, $\frac{p^2}{4}<q$

→ ak $B = 0$ a) $\int \frac{C}{x^2+px+q}dx$ $\quad$ (pripomína vzorec $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$)

→ ak $B \neq 0$ b) $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$

3a) $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx =$

použijem úpravu na štvorec (chcem sa zbaviť člena p.x)

$x^2 + 2.x.\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\boxed{(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1}$

$q - \frac{p^2}{4} > 0$

nech $\boxed{q - \frac{p^2}{4} = a^2}$

$$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2}dx = \left| \begin{matrix} x+\frac{p}{2} = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t^2+a^2}dt =$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C;$$

PRÍKLAD nabudúce