$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ – jaký postup

① Najdu nulové mnohočleny Q – dělím a vnitřek – pokud ≠ 0 zjednodušuji funkci

② Další nulové nebo nulové mnohočleny zjednodušuji funkci

③ Další nulové nebo nulové mnohočleny – pouze dva členy

$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$ nebo $\frac{Ax+B}{(x-a)^2}$ nebo $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}$

$D = p^2 - 4q < 0$ – vzorec na paragraf

příklad $\int \frac{1}{x^2+3x+5}\,dx$ upravu na $\int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{11}{4}}\,dx = \int \frac{1}{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2\left(\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2+1\right)}\,dx =$

α, $a = \frac{\sqrt{11}}{2}$

$\left\{ \text{nazvu rovnu} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right] \right\}$

$= \left| \begin{array}{l} \text{tab} \\ x+\frac{3}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}\,dt = \frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{11}} + C =$

$= \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2(x+\frac{3}{2})}{\sqrt{11}} + C$

příklad upravu na □

$x^2+3x+5 \overset{\text{upravu}}{=} \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5$

$x^2+3x+\frac{9}{4}$

$x+\frac{3}{2}$

integrál $\int \frac{3x+C}{x^2+x+2}\,dx$

$\frac{3}{2}\cdot 0$

příklad: $\int \frac{3x+1}{x^2+x+2}\,dx$ / (nebo jiným upravím n-tou mocninu upravím vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$)

příklad $\int \frac{2(x+1)}{x^2+x+2}\,dx = \ln|x^2+x+2| + C$

$f'(x)$ $f(x)$

$\frac{2(x+1)}{2(x+1)}$

$= 3\int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+\frac{1}{2})}{x^2+x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+x+2}\,dx =$

$\frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2} + \frac{1}{x^2+x+2}\,dx =$

$\frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}$ – vzorec na integrál $\ln$

$\frac{1}{x^2+x+2}$ – vzorec na arctg

$= \frac{3}{2}\left[\ln(x^2+x+2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2(x+1)}{\sqrt{7}} + C\right]$

příklad: $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x-1}\,dx = \int \left(x+1+\frac{2}{x^2-x^2-x-1}\right)dx = (*)$

dělím tak, abych (x^3-x^2) : $(x^3-x^2-x-1) = x+1$

$-(x^3-x^2-x^2-x)$

x^2-x^2+x+1

$-(x^2-x^2+x-1)$

2

racionální funkce

$\frac{2}{x^2-x^2+x-1}$ rozložíme na součin pomocí vzorečků

$\frac{2}{x^2(x-1)+(x-1)} = \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}$

nemá $\mathbb{R}$ kořen

$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad / \cdot (x-1)(x^2+1)$

$2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$

dosadím $(x-1)$: $2 = A(1+1)+0$

$A = 1$

pokračujeme porovnáním koeficientů: $2 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$

$2 = x^2 \cdot 1 + 1 + (Bx^2 - Bx + Cx) - C$

x^2: $0 = 1 + B$

$B = -1$

x: $0 = -B + C$

$0 = 1 + C$

$C = -1$

pokračuji na (*) $= \int \left(x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{-x-1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+1}\,dx =$

$1 = \frac{2}{2}$

$2x+2$

integrál vzorec

integrál vzorec

integrování derivování mocňování se zkrátí $(2x)$

$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x\right) + C$

! výhoda integrování racionálních funkcí je JASNÝ POSTUP! SUPER :)

INTEGROVANIE NIEKTORÝCH IRACIONÁLNYCH FUNKCIÍ

příklad: $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{tab} \\ x = t^4 \\ \sqrt{x} = t^2 \\ \sqrt[4]{x} = t \\ dx = 4t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2+t}\,4t^3dt = 4\int \frac{t^3}{t^2+t}\,dt =$

racionální funkce :)

ak by mne malo $\sqrt[4]{x}$

$x = t^2$

$\sqrt[4]{x} = t$

$= 4\int \frac{t^3}{t(t+1)}\,dt = 4\int \frac{t^2}{t+1}\,dt = 4\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$

nemá lepší – problémy

polynom $\int$ dx

výhoda funkcia nepotrebujem premýšľať, keďže už je do poriadku zložená

$\left\{ \begin{array}{l} t^2 : (t+1) = t-1 \\ -(t^2+t) \\ -t \\ -(-t-1) \\ 1 \end{array} \right\}$

$= 4\left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right] + C =$

$= 4\left[\frac{\sqrt[4]{x}}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln|\sqrt[4]{x}+1|\right] + C$

TYP IRAC. FUNKCIE

$\int R\left[x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \dots, x^{\frac{1}{k_n}}\right]dx$ (znamená racion funkcia $+ - \cdot : :$ konštanty $\sqrt[k_1]{x}, \sqrt[k_2]{x}, \dots$)

$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$

riešime substitúciou $x = t^k$, $t = x^{\frac{1}{k}}$, k da $k = \operatorname{nsn}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$

ktorou prevedieme $\int$ na $\int$ z racionálnej funkcie

příklad 2: $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5dt \\ \sqrt[6]{x} = t \\ \sqrt[3]{x} = t^2 \\ \sqrt{x} = t^3 \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2+t^3}\,6t^5dt = 6\int \frac{t^4}{1+t}\,dt =$

nsn $\{2,3,6\} = 6$

racion funkcia :)

delíme: $t^4 : (t^3+t^2) = t^2 - t^2 + t - 1$

$-(t^4+t^3)$

$-t^3$

$-(-t^3-t^2)$

t^2

$-(t^2+t)$

$-t$

$-(-t-1)$

1

$= 6\int \frac{t^4}{1+t}\,dt =$

$= 6\int \left(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt =$

$\int$ je lepšie zložiť

$= 6\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right] + C = 6\left[\frac{\sqrt[3]{x}^2}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x}+1|\right] + C$

TYP INTEGRALU

$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k_n}\right]dx$

$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$

$ad - bc \neq 0$

$\cancel{x \neq \sqrt{x}}$

riešime substitúciou $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$

$k = \operatorname{nsn}\{k_1, \dots, k_n\}$

příklad: $\int \frac{4x+5\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}\,dx = \int \frac{4x+5\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+2 = t^6 \\ dx = 6t^5dt \\ \sqrt{x+2} = t^3 \\ \sqrt[3]{x+2} = t^2 \\ x = t^6-2 \end{array} \right| =$

nsn $\{2,3\} = 6$

$= \int \frac{4.(t^6-2)+5.t^3}{(t^2)^2} \cdot 6t^5dt = 6\int \frac{4t^6-8+5t^3}{\cancel{t^4}} \cdot \cancel{t^5}\,dt =$

$= 6\int \left(4t^7 - 8t + 5t^4\right)dt = 6\left[\frac{4t^8}{8} - \frac{8t^2}{2} + \frac{5t^5}{5}\right] + C$

$= 6\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^4}{2} - 4.\sqrt[3]{x+2} + \left(\sqrt[6]{x+2}\right)^5\right] + C$