(1.27) Úterý – 1.zá 6 polední
+ dopolední blok

příklady – typy zkoušek z minula 1.27 (vždy EXTI) MM2 } 45 bodů ← 3 bodové přík. / 15 bodové ředitel.

přerovnání: integrování racionální funkcí

příklad: $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx = \left|\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = t\right|$

$\frac{x+2}{x-1} = t^2 \quad / \cdot (x-1)$

$x+2 = t^2(x-1)$

$x+2 = x\cdot t^2 - 1\cdot t^2$

$x(1-t^2) = -t^2-2$

$x = \frac{-t^2-2}{1-t^2} = \frac{t^2+2}{t^2-1}$

$dx = \frac{2t(t^2-1)-(t^2+2)\cdot 2t}{(t^2-1)^2}\,dt$

$dx = \frac{-6t}{(t^2-1)^2}\,dt$

$= \int \frac{1}{\frac{t^2+2}{t^2-1}}\cdot t\cdot\frac{-6t}{(t^2-1)^2}\,dt =$

$= -6\int \frac{t^2}{(t^2+2)(t^2-1)}\,dt =$

☺ vyřešíme funkci MAM SMART POSUP

rozklad na par. zlomky: $\frac{t^2}{(t^2+2)(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+2}$ $/(t-1)(t+1)\cdot(t^2+2)$

3 par. zlom.

$t^2 = A(t+1)(t^2+2) + B(t-1)(t^2+2) + (Ct+D)(t-1)(t+1)$

dosadíme:

$t=-1$: $1 = A(-1+1)(1+2)$, $A = \frac{1}{3}$

$t=1$: $1 = B(1-1)(1+2)$, $B = -\frac{1}{3}$

$t=0$: $0 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2 + B(-1)\cdot 2 + D\cdot(-1)\cdot 1$, $\frac{1}{6} = D$

$t=2$: $4 = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 6 + (C\cdot 2 + \frac{1}{6})\cdot 1\cdot 3$, $C = 0$

$= -6\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} - \frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{1}{6}}{t^2+2}\right)dt =$

$= \int\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t^2+2}\right)dt =$

$= -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 4\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C_0$

$= -\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right| + \ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right| - \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + C$

TTT IRACION. FUNKCE:

$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $a \neq 0$

↳ upravíme na čtverec, tedy máme $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

příklad ① $\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-[x^2-2x-3]}}\,dx =$

$= \int \frac{1}{\sqrt{-[(x-1)^2-1-3]}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\,dx = \left|\begin{matrix} x-1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| =$

$(x-1)^2$

$= \int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \arcsin\frac{t}{2} + C = \arcsin\frac{x-1}{2} + C$ ☺

② $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2(x^2-2x+\frac{1}{2})}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-2x+\frac{1}{2})}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2-1+\frac{1}{2}}}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+\frac{1}{2}}}\,dx = \left|\begin{matrix} x-1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{1}{2}}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{1}{2}}\right| + C =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+\frac{1}{2}}\right| + C$,

INTEGROVÁNÍ NĚKTERÝCH GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

co víme: $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \ln|\sin x| + C$

příklad $\int \sin x \cos x\,dx = \left|\begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{matrix}\right| = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 t}{2} + C$

1 spůsob: substituce sama nám ay $\cos x = t$

2. spůsob: použití vztah $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\int \sin x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + C =$

$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$

poznámka ③ Mnohé integrály s goniom funkcí příkladu upravíme vztahy, které platí mezi goniom funkcemi

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ } používáme při integrování goniom. mocnin $\int \sin^k x\,dx$, $\int \cos^k x\,dx$

příkl ② $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$

③ $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \int \left(\underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{1}{2}\sin 2x}\right)^2 dx = \int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx =$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C$

④ $\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1+\cos 2x)^2\,dx =$

$= \frac{1}{4}\int\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$

použijeme vztah $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + 2\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4x}{4}\right) + C$

② integrály typu $\int R[\sin x]\cdot\cos x\,dx$ (nastavíme substituci $\sin x = t$) $\int R[\cos x]\cdot\sin x\,dx$ (nastavíme substituci $\cos x = t$)

map $\int \frac{2\sin^2 x}{3\cos x - 4}\cdot\cos x\,dx =$ Sub $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$

$= \int \frac{2t^2}{3t-4}\,dt$

racionální funkce ☺

příklady ① $\int (2 + 3\cos^2 x)\cdot\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \\ \sin x\,dx = -dt \end{matrix}\right| = \int(2+3t^2)\cdot(-dt) = -\int(2+3t^2)\,dt$

$= -\left(2t + \frac{3t^3}{3}\right) + C = -2\cos x - \cos^3 x + C$

ať mám vyjádření $\cos x$

② $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{\underbrace{2+\cos x}_{R[\cos x]}}\cdot\sin x\,dx =$

$= \left|\begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \\ \sin x\,dx = -dt \end{matrix}\right| = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t+2}\,dt =$

racionální f ☺, nejvyšší, lze dělit

$(t^2 - 1) : (t+2) = t - 2$

$-(t^2 + 2t)$

$-2t - 1$

$-(-2t - 4)$

zpět ③

$= \int\left(t - 2 + \frac{3}{t+2}\right)dt =$

vyjádřeno ☺

$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C$

odtud: $\int x^3\cdot e^{(x^4-5)}\,dx = \left|\begin{matrix} \text{subst} \\ x^4-5 = t \\ 4x^3dx = dt \\ x^3dx = \frac{dt}{4} \end{matrix}\right| = \int e^t\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int e^t\,dt =$

$= \frac{1}{4}e^t + C = \frac{1}{4}\cdot e^{x^4-5} + C$

konec odtrhy

③ $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\underbrace{\sin^2 x}_{\text{nyní } \cos^2 x \text{ z } 1-\cos^2 x}}\,dx$

$= \int \frac{1}{\underbrace{1-\cos x}_{R[\cos x]}}\cdot\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \\ \sin x\,dx = -dt \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{t^2-1}\,dt =$

racionální funkce ☺

vyjádříme

abych se nepomátal, vezmu

$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$

$1 = A(t+1) + B(t-1)$

$t=1$: $1 = A\cdot 2$, $A = \frac{1}{2}$

$t=-1$: $1 = B(-2)$, $B = -\frac{1}{2}$

$= \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt =$

$= \frac{1}{2}\left[\ln|t-1| - \ln|t+1|\right] + C = \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} + C$

vzorec ?

$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$

④ $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\underbrace{1-\sin^2 x}_{R[\sin x]}}\cdot\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} \text{subst} \\ \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{matrix}\right|$

... DÚ dopočítat