Matematika I, opak. – 7.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Zopakujte si:

1. Výraz $y - y_0 = k_t(x - x_0)$ je rovnicou ...dotyčnice..... ku grafu .

2. Smernica normály sa vypočíta ako ... $\frac{1}{f'(x_0)}$ ... .

3. Y – nová súradnica dotykového bodu sa určí ako

   a) $y_0 = f'(x_0)$,

   b) $y_0 = f(x_0)$,

   c) $y_0 = \frac{1}{f(x_0).}$

4. Derivácia $f(x) = \ln x$ je

   a) x

   b) $\frac{1}{\ln x}$

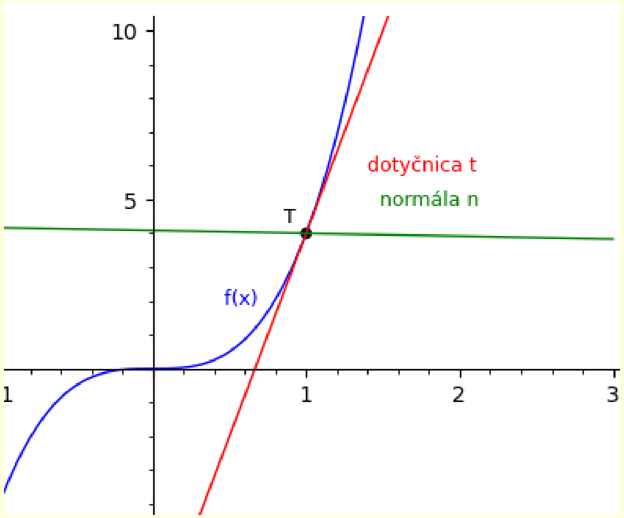
   c) $\frac{1}{x}$

5. Derivácia $\big(f(x).g(x)\big)'$ je

   a) $f'(x).g'(x)$ b) $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ c) $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

6. Derivácia $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je ...$-2x^{-3}$...

Geometrický význam derivácie funkcie



dotykový bod $T\,[x_0, y_0]$ ku grafu funkcie f(x)

Smernica dotyčnice = derivácia f ´(x_0) v dotykovom bode T ku grafu f (x)

$$k_t = f'(x_0)$$

Rovnica dotyčnice v dotykovom bode T ku grafu f (x)

$$t\!:\;\; y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$$

Smernica normály $\quad k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)} = -\dfrac{1}{k_t}$

Rovnica normály v dotykovom bode T ku grafu f (x) kolmo na dotyčnicu

$$n\!:\;\; y - y_0 = k_n\,(x - x_0)$$

Pr. 3 – 29 / 7: Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu $f(x)$ v dotykovom bode $T[1, ?]$

$$f(x) = 2x \ln x$$

Pr. 4 – 29 / 9: Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu $f(x)$ v dotykovom bode $T[0, ?]$

$$f(x) = \frac{e^x}{2} + 1$$

$t: x - 2y + 3 = 0$

$n: 4x + 2y - 3 = 0$

$x_0 = 0,\qquad y_0 = f(x_0) = \frac{e^0}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}\qquad T[0, \frac{3}{2}]$

$f'(x) = \frac{e^x}{2}\qquad \boldsymbol{k_t = f'(x_0) = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{k_t} = -2}$

$\boldsymbol{t}$: $\boldsymbol{y - y_0 = k_t\,(x - x_0)}$

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$2y - 3 = x$$

$\underline{t: 0 = x - 2y + 3}$

$\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{y - y_0 = k_n\,(x - x_0)}$

$$y - \frac{3}{2} = -2\,(x - 0)$$

$$-2y + 3 = 4x$$

$\underline{n:\ 0 = 4x + 2y - 3}$

Dú – str. 29 / 4, 6, 8, 10

L´ Hospitalovo pravidlo

Pre výpočet limít, kde sa použije derivácia. Platí za určitých podmienok

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1. limity s neurčitosťou $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ - priamo použijeme toto pravidlo

Pr. 1 : Riešte limitu pomocou L´Hopitaloveho pravidla

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}$$

Pr. 2 – 34 / 5: Riešte limitu pomocou L´Hopitaloveho pravidla

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x-3^x}{x} \qquad \ln 2$$

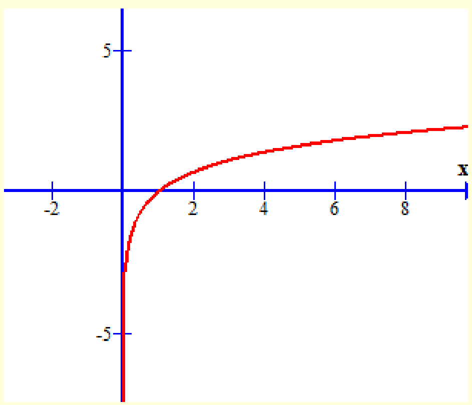
$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x-3^x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \overset{L´H}{\lim_{x\to 0}}\frac{(6^x-3^x)´}{x´} = \lim_{x\to 0}\frac{6^x\ln 6-3^x\ln 3}{1} = 6^0\ln 6-3^0\ln 3 = \ln\frac{6}{3} = \ln 2$$

$$\ln a-\ln b = \ln\frac{a}{b}$$

Pr. 3 – 35 / 13: Riešte limitu pomocou L´Hopitaloveho pravidla

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\ L´H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)´}{(\sqrt{x})´} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\ L´H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(2\sqrt{x})´}{x´}\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

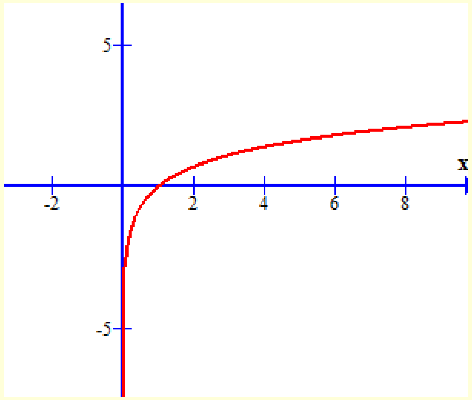


Dú – str. 34, 35 / 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12

2. limity s neurčitosťou $\infty - \infty$, upravíme na spoločného menovateľa, dostaneme neurčitosť $\frac{\infty}{\infty}$ alebo $\frac{0}{0}$ a potom použijeme toto pravidlo

Pr. 4 – 35 / 16: Riešte limitu pomocou L´Hopitaloveho pravidla

$$\lim_{x \to 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$



Pr. 5 – 35 / 19: Riešte limitu pomocou L´Hopitaloveho pravidla

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sin x}\right) \qquad -\infty$$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sin x}\right)\overset{\infty - \infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-2x}{2x.\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\overset{L´H}{\lim_{x\to 0^+}}\frac{[\sin x-2x]´}{[2x.\sin x]´}=$$

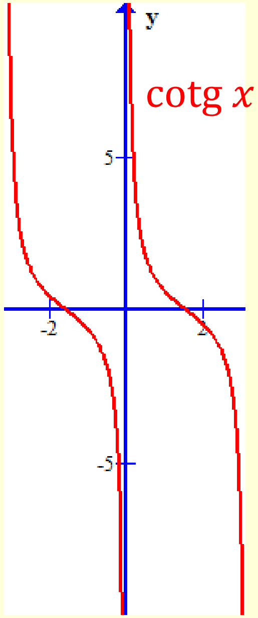
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x\ -2}{2.\sin x+2x.\cos x}=\frac{\cos 0^+-2}{2.\sin 0^+ +2.0^+.\cos 0^+}=\frac{1-2}{0^+ +0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Dú – str. 34, 35 / 17,18, 20

3. limity s neurčitosťou $0.\infty$, upravíme limitu na tvar ,

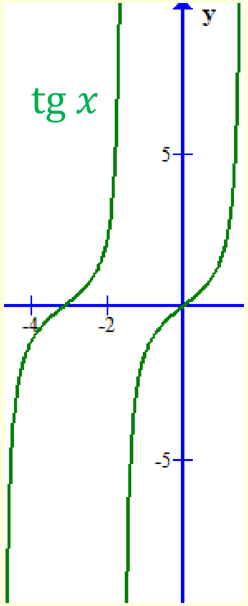
$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \textbf{alebo} \quad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

dostaneme neurčitosť $\frac{\infty}{\infty}$ alebo $\frac{0}{0}$ a potom použijeme toto pravidlo



Pr. 6: Riešte limitu pomocou L´Hopitaloveho pravidla

$$\lim_{x\to 0^+} (1 - \cos x).\operatorname{cotg} x$$

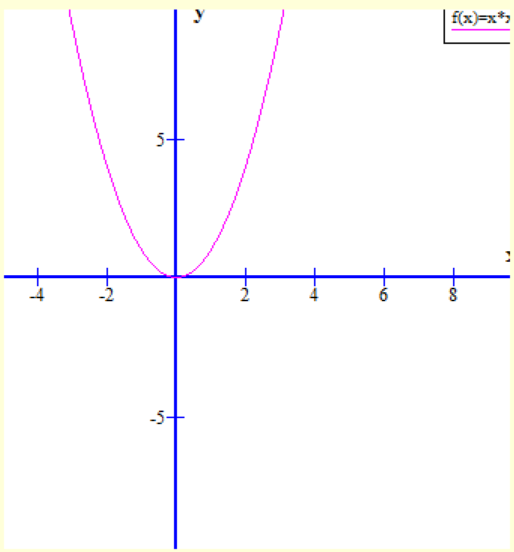


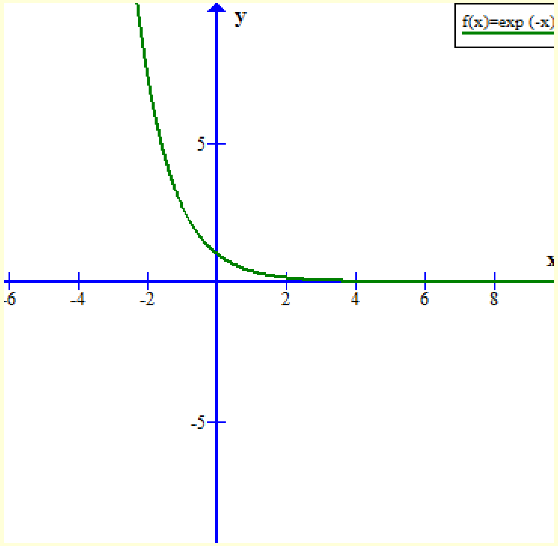
Pr. 7 – 35 / 21: Riešte limitu pomocou L´Hopitaloveho pravidla

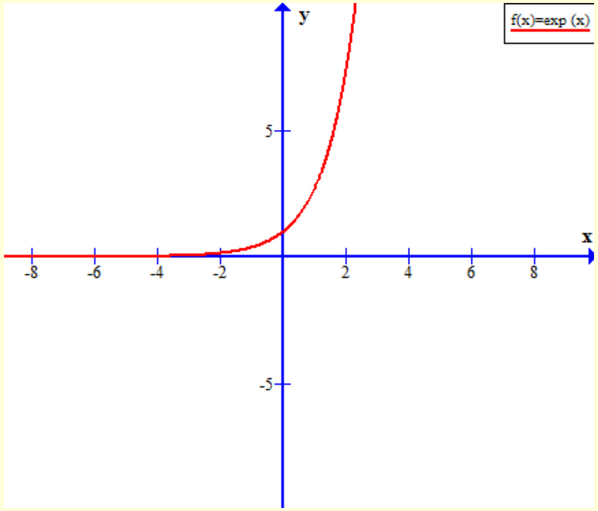
$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} \qquad 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} \overset{\infty.0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^{-x}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \overset{L´H}{\lim_{x\to\infty}} \frac{(x^2)´}{(e^x)´} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \overset{L´H}{\lim_{x\to\infty}} \frac{(2x)´}{(e^x)´} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$







Dú – str. 34, 35 / 22

Rozdelenie na 1. zápočtovú písomku:
piatok 10.4.2026 o 10:50, miestnosť ZP3 píšu študenti označení oranžovou farbou
piatok 10.4.2026 o 12:05, miestnosť ZP3 píšu ostatní študenti, ktorí nie sú vyfarbení

Okruhy:
príklady - definičný obor, derivácia funkcie, dotyčnica funkcie, výpočet limity, ASS, ABS
teória - všetko po priebeh funkcie (prednáška 7,8 už nie) - pozrite prezentácie z prednášok na https://kmti.fei.tuke.sk/index.php/predmet/matematika-i v časti prílohy, tu nájdete aj vzorovú písomku

Písomka - 5 príkladov (30 bodov) , teória za 15 bodov
doniesť dvojhárok s hlavičkou https://kmti.fei.tuke.sk/index.php/predmet/matematika-i

čas: 70 minút