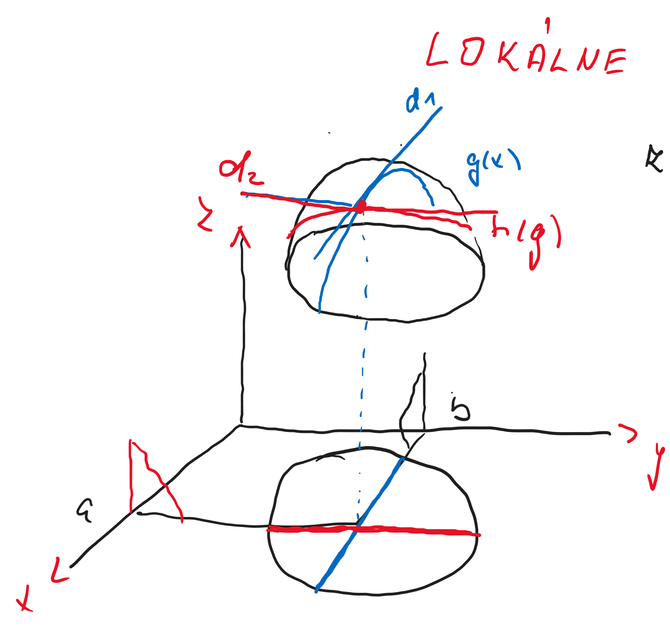
LOKÁLNE EXTRÉMY F2P



$z = f(x,y)$ $[x,b]$ → úsečka

$g(x) = f(x,b)$ → F1P a ona leží v rovine $y = b$

$g(y) = f(a,y)$ $A = [a,b]$

→ dotyčnica ku $g(x)$ má rovnicu

d_1 $z - f(A) = g'(a)\,(x-a) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}(x-a)$ $[a, b, f(a,b)]$

$[a,y]$ a $h(y) = f(a,y)$ → F1P leží v rovine $x = a$ $h(b) = f(a,b)$

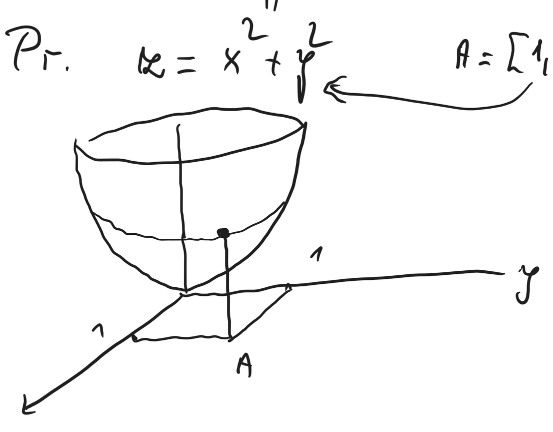
dotyčnica d_2: $z - f(A) = h'(b)(y-b) = \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y-b)$

Rovina prechádzajúca dvoma dotyčnicami d_1, d_2 – DOTYKOVÁ ROVINA ku grafu $f(x,y)$

ROVNICA $\boxed{z - f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y-b)}$

$z - 3 = 4(x-2) + 5(y-7)$

Pr. $z = x^2 + y^2$ ($f(x,y)$) $A = [1,1]$ $A_p = [1,1,2]$ $f(1,1) = f(A)$



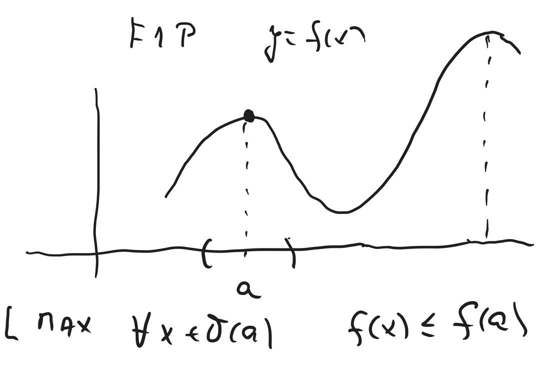
$f'_x = z'_x = 2x$ $f'_x(A) = 2$

$f'_y = z'_y = 2y$ $f'_y(A) = 2$

$z - 2 = 2(x-1) + 2(y-1)$

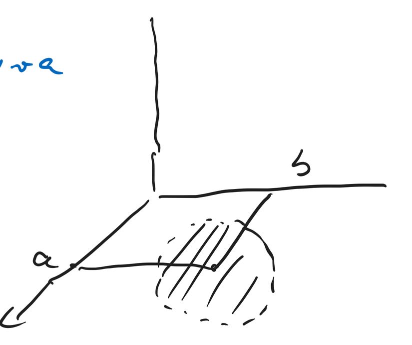
L. E. pre F2P

F1P $y = f(x)$

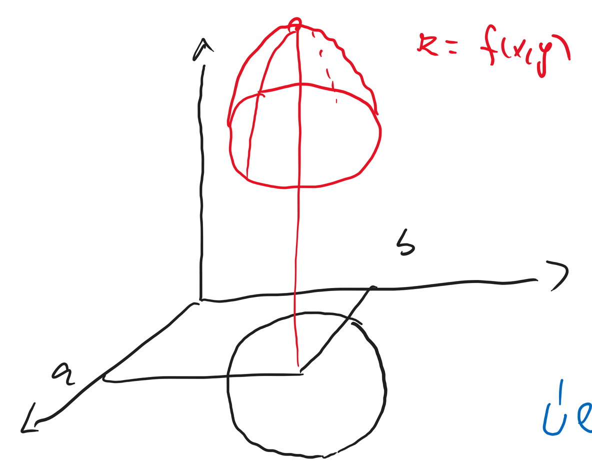


ak f má L. MAX v a
tak $f'(a) = 0$
a – st. bod

L max $\forall x \in \mathcal{O}(a)$ $f(x) \le f(a)$



$\mathcal{O}(A) = \{[x,y],\ \rho([x,y],A) < r\}$



F2P $f(x,y)$ má v A $\boxed{\text{LOK. MAX}}$

ak $\forall [x,y] \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(x,y) \le f(a,b)$

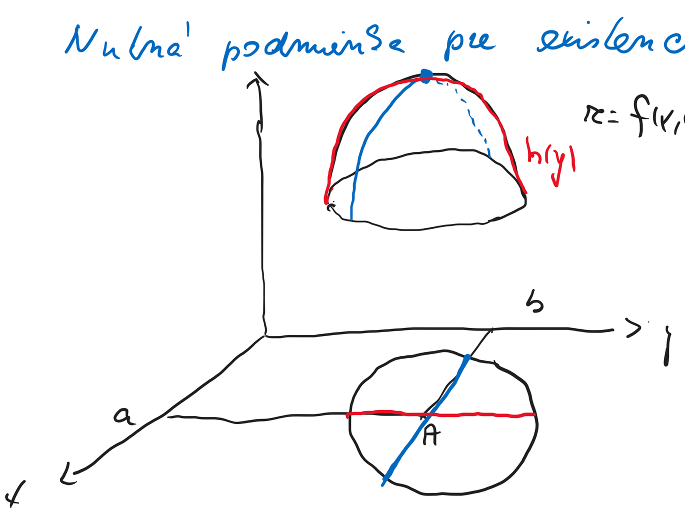
„KOPEC"

$\boxed{\text{LOK MIN}}$

$\forall [x,y] \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(x,y) \ge f(a,b)$

Úloha – AKO NÁJSŤ L. E ? POTOM GLOBÁLNE EX.

Nutná podmienka pre existenciu LOK. MAX.



Predpokladajme, že $f(x,y)$ má LOK. MAX v $A = [a,b]$

$\forall [x,y] \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(x,y) \le f(a,b)$ $[a, b, f(a,b)]$ NAJVYŠŠÍ BOD

Použijeme pom. fcie $g(x)$, $h(y)$

$g(x) = f(x,b)$ táto funkcia prechádza bodom $[a, b, f(a,b)]$

$g(a) = f(a,b)$ a teda v a má lok. maximum

→ $\forall [x,b] \in \mathcal{O}(A)$ platí $\underbrace{f(x,b)}_{g(x)} \le \underbrace{f(a,b)}_{g(a)}$

úsečka p

teda z teórie F1P platí

$g'(a) = 0$
$\shortparallel$
$\frac{\partial f(A)}{\partial x}$

$h(y) = f(a,y)$ . . . . .

Odvodili sme, že ak $f(x,y)$ má v bode A lok. extrém tak $\frac{\partial f(A)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(A)}{\partial y} = 0$

BOD A pre ktorý platí $f'_x(A) = 0 = f'_y(A)$ sa

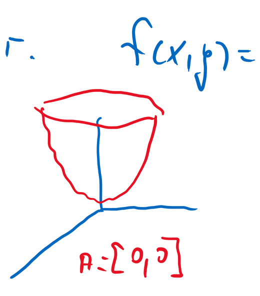
STACIONÁRNY BOD

Veta. Nech $f(x,y)$ má LOK. EXT. v A, nech existujú $\frac{\partial f(A)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(A)}{\partial y}$, potom A je STACIONÁRNY BOD (SB) (t. j. $f'_x(A) = 0 = f'_y(A)$)

Význam vety → LOK. EX NEMÔŽE BYŤ INDE AKO V STAC. BODE

→ REDUKUJE POČET KANDIDÁTOV NA LOK. EXT.

Pr. $f(x,y) = x^2 + y^2$



1. SB. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$A = [0,0]$ jediný SB
t. j. inde LOK. EXT. BYŤ NEMÔŽE . . .

2. ROZHODNUTIE
- LOK MAX
- LOK MIN
- NIČ

$\forall (x,y) \in \mathcal{D}(f)$ platí $f(x,y) = x^2 + y^2 \ge 0 = f(A)$ LOK. MIN, GLOB. MIN

Pr. $f(x,y) = xy$ $(z = x \cdot y)$ NIE JE TAM EXTRÉM (BOL GRAF)

$f'_x = y = 0$ SB $A = [0,0]$

$f'_y = x = 0$

$f(A) = 0$ na každom $\mathcal{O}(A)$ dokážeme nájsť X, Y $f(X) > 0$, $f(Y) < 0$

$h > 0$

$X = [h,h]$ $f(X) = h^2 > 0 = f(A)$

$Y = [-h,h]$ $f(Y) = -h^2 < 0 = f(A)$

V SB NEMUSÍ BYŤ LOK. EX !!!

POTREBUJEME TEST NA EXIST. LOK MAX, LOK MIN

F1P nech $f'(a) = 0$ $(a = SB)$

$f''(a) > 0 \Rightarrow$ LOK MIN

$f''(a) < 0 \Rightarrow$ LOK MAX

$f''(a) = 0 \Rightarrow$?

Pre F1P ROZHODNUTIE ROBÍME NA ZÁKLADE DRUHEJ DERI.

PRE F2P – PODOBNÉ, ALE MÁME 4 DRUHÉ DERIVÁCIE

$f''_{xx},\ f''_{yy},\ f''_{xy} = f''_{yx},$

MÁME 4 HODNOTY A POTREBUJEME 1

$D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$

x – 1 prem.
y – 2 pre.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

index hovorí podľa ktorej premennej robíme deriváciu

Veta (ROZHODNUTIE PRE L.E)

Nech $f(x,y)$ má na $\mathcal{O}(A)$ spojité parciálne derivácie I. aj II. rádu

Nech A je SB fcie $f(x,y)$.

1. Ak $f''_{xx}(A) > 0$ & $\begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} > 0$ tak f má v A lok. MIN

2. Ak $f''_{xx}(A) < 0$ & $\left|\quad\right| > 0$, tak f má v A lok MAX

3. ak $\boxed{D < 0}$, tak v A nie je LOK. EXT.

4. ak niečo je nula $\Rightarrow$?

$z = x \cdot y$

VYJASNENIE PREČO $f''_{xx}(A)$ A NIE $f''_{yy}(A)$

$0 < \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f''_{xx} f''_{yy}}_{+} - \underbrace{\left(f''_{xy}\right)^2}_{-}$

t. j. $f''_{xx}(A)$, $f''_{yy}(A)$ majú rovnaké znamienko