NMPaMŠ – 7.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pravdepodobnosť
Klasická pravdepodobnosť

Jav (A) - výsledok pokusu, ktorý je možné opakovať za určitých podmienok niekoľkokrát

Istý jav *I*, nemožný jav 0.

Pravdepodobnosť javu A

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(A) = \frac{\text{počet všetkých možných priaznivých výsledkov javu } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu}}$$

Pre istý a nemožný jav je $P(I) = 1$ *a* $P(\emptyset) = 0$.

Pre opačný jav platí $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Žiadny = znamená 0 a nie viac

Najviac 3 = znamená 0, 1, 2, 3 a nie viac

Aspoň 2 = znamená dva a viac

Najmenej 5 = znamená 5 a viac

Pr. 5: V krabici je 7 bielych a 7 čiernych guľôčok. Určte pravdepodobnosť, že medzi šiestimi náhodne vybranými guľôčkami bude práve k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 bielych guľôčok.

Pravdepodobnosť
Podmienená pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B (ak nastal jav B, potom pre jav A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pravdepodobnosť javu B za predpokladu, že nastal jav A (ak nastal jav A, potom pre jav B)

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Vlastnosti pravdepodobnosti

Pre disjunktné javy: ak $A \cap B = \emptyset$, *tak* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

pre ľubovoľné javy A, B *je* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

Veta o úplnej pravdepodobnosti

Nech $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav A platí

$$P(A) = P(A|H_1)\cdot P(H_1) + P(A|H_2)\cdot P(H_2) + \cdots + P(A|H_n)\cdot P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\cdot P(H_i).$$

Bayesov vzorec

Nech javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu H_k je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)\cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k)\cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$.

Pr. 1: Školský prieskum zistil, že 7 z 30 študentov chodí do školy pešo. Náhodne vyberieme postupne štyroch študentov. Aká je pravdepodobnosť, že prvý a druhý vybraný študent chodí do školy pešo, ale tretí a štvrtý nechodí do školy pešo?

Pr. 2: Pravdepodobnosť toho, že ženatý muž pravidelne sporí je 0,6, pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí je 0,5 a pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí, ak pravidelne sporí jej muž, je 0,4. Určte pravdepodobnosť toho, že:

a) obaja pravidelne sporia,

b) pravidelne sporí ženatý muž, ak pravidelne sporí jeho žena,

c) aspoň jeden z manželov pravidelne sporí.

b) P(A\B) - ?

$$P(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}24}{0{,}5} = 0{,}48$$

Pr. 3: Dvaja robotníci vyrábajú tie isté výrobky, pričom prvý vyrobí dvakrát viac výrobkov ako druhý za rovnakú dobu. Pravdepodobnosť vyrobenia nepodarku je u 1. robotníka 0,02 a u 2. robotníka 0,01. Zo skladu, kde sú uložené všetky výrobky, náhodne vyberieme jeden výrobok.

a) Aká je pravdepodobnosť, že daný výrobok nebude nepodarok?

b) Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný výrobok bol vyrobený prvým robotníkom, ak bol nepodarok?

Pr. 4: Z krabice, ktorá obsahuje 6 čiernych a 9 bielych gulí, náhodne vyberieme jednu guľu. Potom ju vrátime spať a pridáme ešte 5 gulí tej istej farby, akej bola vytiahnutá guľa.

a) Aká je pravdepodobnosť toho, že v druhom ťahu vytiahneme z krabice bielu guľu?

b) Aká je pravdepodobnosť, že v prvom ťahu sme vytiahli čiernu guľu, ak v druhom ťahu vytiahneme z krabice bielu guľu?

$$P(\mathrm{A} \setminus \mathrm{H}_2) = \frac{P(\mathrm{H}_2).P(\mathrm{A} \setminus \mathrm{H}_2)}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{20}}{0{,}6} = 0{,}3$$

Pravdepodobnosť
Opakované nezávislé pokusy

Nezávislý pokus – výsledkom pokusu je jav A, ktorý opakujeme n - krát, pričom tieto pokusy sú navzájom nezávislé, výsledok jedného nezávisí od výsledku druhého, pravdepodobnosť javu A je pre všetky pokusy rovnaká

Bernoulliho veta
A - jav, **p** je jeho pravdepodobnosť pri danom pokuse,
k – počet nastatí javu A pri danom pokuse,
n – počet nezávislých opakovaní pokusu

$P_{n,p}$ (k) je pravdepodobnosť toho, že pri **n** – násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve **k**-krát

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Pr. 1: Predpokladajme, že hádžeme súčasné dvomi mincami. Minca má dve strany – hlava a znak. Vykonáme štyri hody. Aká je pravdepodobnosť, že

a) pri troch hodoch zo štyroch hodíme dve hlavy;

b) aspoň (najmenej) pri jednom hode zo štyroch hodíme dve hlavy.

Pr. 2: Pravdepodobnosť toho, že basketbalista trafí do koša je 0,7. Určte pravdepodobnosť toho, že basketbalista pri šiestich nezávislých hodoch:

a) práve dvakrát trafí do koša;

b) aspoň dvakrát trafí do koša.

a) A – basketbalista trafí do koša

p (A) = 0,7

n = 6

k = 2 (práve dvakrát trafí)

$$P_{6,0,7}(2) = \binom{6}{2} 0{,}7^2 . 0{,}3^4 = 0{,}0595$$

b) A – basketbalista trafí do koša

p (A) = 0,7

n = 6

$k \geq 2$ (aspoň dvakrát trafí, k = 2 - 6)

B – basketbalista trafí kôš aspoň dvakrát pri 6 nezávislých hodoch

$\overline{\mathrm{B}}$ – basketbalista trafí kôš najviac jedenkrát pri 6 nezávislých hodoch, $k < 2$ $(k = 0, 1)$

$$\mathrm{P(B)} = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - (P_{6,0,7}(0) + P_{6,0,7}(1))$$

$$\mathrm{P(B)} = 1 - \left(\binom{6}{0} 0{,}7^0 . 0{,}3^6 + \binom{6}{1} 0{,}7^1 . 0{,}3^5 \right) = 0{,}9891$$

Dú: Súbor príkladov na precvičenie 2 / pravdepodobnosť: 19 – 24, 27 - 30