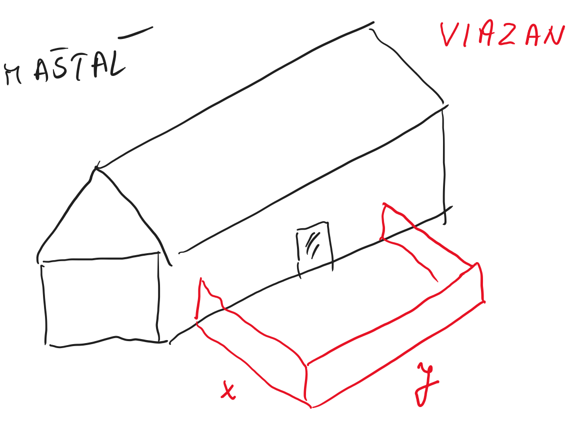
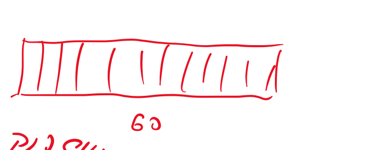
MAŠTAĽ



VIAZANÉ EXTRÉMY (V.E.)

OBDĹŽNIKOVÚ OHRADU
JEDNU STRANU TVORÍ DOM
MÁME MATERIÁL NA 60 m PLOTU



60

CHCEME MAXIMÁLNU PLOCHU

$P = x.y = f(x,y) \to MAX$ OBMEDZENIE VÄZBA $2x + y = 60$

HĽADÁME MAX fcie f za podmienky $g(x,y) = 0$ $\boxed{2x + y - 60 = 0}$
VIAZANÉ MAX $g(x,y) = 0$

Nech $A = [a,b]$ je taký, že $g(a,b) = 0$

a ak pre $\forall [x,y]$, takých, že $g(x,y) = 0$ platí $f(x,y) \le f(a,b)$

tak hovoríme, že fcia f má v A VIAZANÉ MAX (LOKÁLNE)

ROZDIEL MEDZI $\underbrace{\text{LOK MAX}}_{O(A)}$ & $\underbrace{\text{VIAZ. MAX}}_{g(x,y)=0}$

Ak nastane situácia, že z väzby t.j. z $g(x,y) = 0$ viem vyjadriť $x = \varphi(y)$ resp. $y = \psi(x)$

tak naša úloha vedie na LOK. EXT. F1P

u nás $y = 60 - 2x$

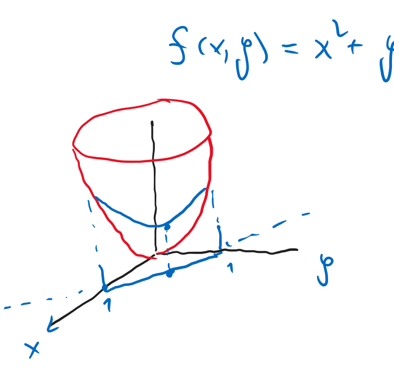
$f(x,y) = x.y = x(60-2x) = F(x)$ hľadáme ext. F1P

1. SB: $F'(x) = 60 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{60}{4} = 15$ ($y = 60 - 2x = 30$)

2. Test $F''(x) = -4 < 0$ LOK. MAX $A = [15, 30]$ VIAZANÉ MAX

EŠTE 1 POHĽAD

$f(x,y) = x^2 + y^2$



JE JASNÉ, ŽE LOK EXT. TEJTO FCIE JE V $[0,0]$
MINIMUM

AK PRIDÁME OBMEDZUJÚCU PODMIENKU (VÄZBA)
NAPR. $x + y - 1 = 0$ (obmedzíme def obor
→ v R_2 (x,y) predstavuje priamku
→ v R_3 (x,y,z) – rovinu

HĽADÁME MAX/MIN MODREJ KRIVKY
=
PRIESEČNICA PARABOLOIDU & ROVINY
$\underbrace{z = f(x,y) \quad z = g(x,y)}$ $g(x,y) = 0$

VIAZANÝ EXTRÉM JE EXTRÉM PRIESEČNICE TÝCHTO DVOCH PLÔCH

$f(x,y) = x^2 + y^2 \to MIN$ ak $\underbrace{x + y - 1 = 0}_{y = 1-x}$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = x^2 + (1-x)^2 = F(x)$

1. SB. $F'(x) = 2x - 2(1-x) = 0$
$2x = 1$
$x = 1/2 \Rightarrow y = 1/2$ $A = [1/2, 1/2]$

$f(x,y)$ má v A VIAZ. MIN

2. TEST $F''(x) = 2 > 0$
v $1/2$ má F LOK MIN

2. ČO AK Z $g(x,y) = 0$ NEVIEM (JEDNOZNAČNE) VYJADRIŤ ANI x ani y
POUŽIJE POMOCNÚ (LANGRANGEovú) FCIU

$L(x,y) = \| \underbrace{L(x,y,\lambda)}_{F\,3P} = \overset{\text{FCIA}}{f(x,y)} + \lambda \overset{\text{VÄZBA (JEJ ĽAVÁ STRANA)}}{g(x,y)} \|$

λ - parameter → PARAMETER

HĽADÁME LOK. EXT LAGRANG. FCIE

1. SB $L'_x = 0$
$L'_y = 0$
pridaj väzbu $(L'_\lambda) = g(x,y) = 0$

STAC. BOD $A = [a,b]$ spĺňa všetky 3 rovnice a teda spec. $g(a,b) = 0$

2. Testom overíme, že $L(x,y)$ má v A napr. LOK. MAX
t.j. $\forall (x,y) \in O(A)$ platí $L(x,y) \le L(a,b)$

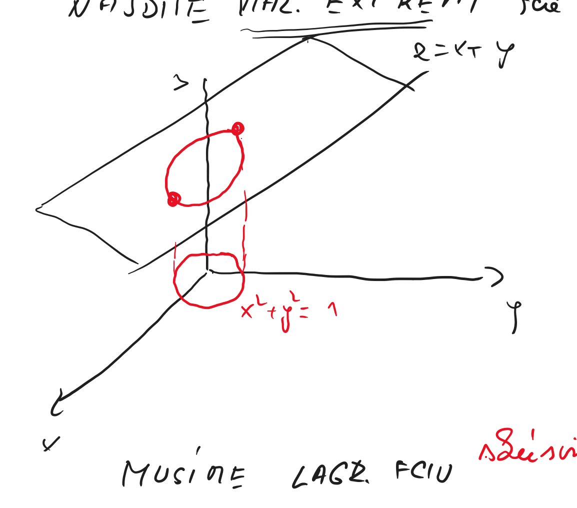
$f(x,y) + \lambda g(x,y) \le f(a,b) + \lambda \overbrace{g(a,b)}^{=0}$

spec. ak uvažujeme body $[x,y]$ také, že $g(x,y) = 0$, tak máme
$f(x,y) \le f(a,b)$

t.j. f má v A VIAZANÉ MAX

OVERILI SME, ŽE
LOK. EXTRÉM $L(x,y)$ JE VIAZANÝM EXTRÉMOM $f(x,y)$
(ZA PODM. $g(x,y) = 0$)

PRÍKLAD
NÁJDITE VIAZ. EXTRÉMY fcie $\underbrace{f(x,y) = x + y}_{\text{rovina}}$, AK $x^2 + y^2 - 1 = 0$
$g(x,y) = 0$
→ v (x,y) kružnicu
v (x,y,z) valec



hľadá MAX/MIN PRIESEČNICE ROVINY & VALCA
Z OBRÁZKA VIDÍME, ŽE BUDE AJ VIAZ. MAX
VIAZ. MIN

MUSÍME LAGR. FCIU nevieme $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$ t.j. nevieme jednoznačne y

$L(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

HĽADÁME KLASICKÉ LOK EXT. $L(x,y)$
A TIE BUDÚ VIAZ. EX $f(x,y)$

1. SB

$L'_x = 1 + \lambda 2x = 0$ → $\lambda = -\frac{1}{2x}$
$L'_y = 1 + \lambda 2y = 0$ → $\lambda = -\frac{1}{2y}$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$

Best of podelp

$-\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y}$ $/ \cdot 2xy$

$\boxed{y = x}$

$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(y = x)$ MÁM 2 SB

$A_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; $A_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\lambda(A_1) = \lambda_1 = -\frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\lambda(A_2) = \lambda_2 = -\frac{1}{2\frac{-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ NA POTOM

2. test $L''_{xx} = 2\lambda$ $L''_{yy} = 2\lambda$ $L''_{xy} = 0 = L''_{yx}$

test pre A_1

$-\frac{2}{\sqrt{2}} < 0$, $\begin{vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$ v A_1 má $L(x,y)$ LOK. MAX
t.j. $f(x,y)$ má VIAZ. MAX

test A_2

$\frac{2}{\sqrt{2}} > 0$, $\begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$ v A_2 má $L(x,y)$ LOK MIN
t.j. $f(x,y)$ má VIAZ. MIN.

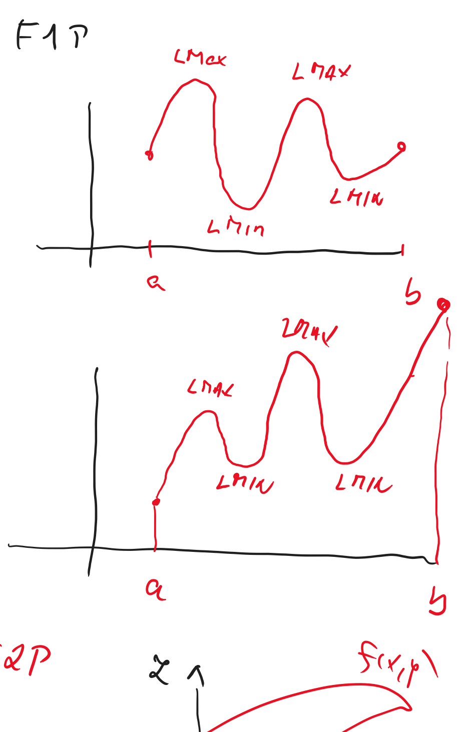
MÁME LOK. EXT. } GLOB. EXT
VIAZ. EXT. AKO NÁJSŤ POMOCOU LOK & VIAZ. EXT

NÁMET ČERPÁME Z F1P $f(x)$ je spoj na $\langle a,b \rangle \Rightarrow \exists$ GLOB MIN & MAX

LOK MAX: $\forall (x,y) \in \boxed{O(A)}$ platí $f(x,y) \le f(a,b)$
VIA MAX: $\forall (x,y)$ také, že $\boxed{g(x,y) = 0}$ platí $f(x,y) \le f(a,b)$ $(g(a,b) = 0)$
GLOB MAX: $\forall (x,y) \boxed{\in D(f)}$ platí $f(x,y) \le f(a,b)$

Ak $f(x,y)$ je spoj. na uzavretej obr. M, tak má GL. MAX aj MIN

F1P

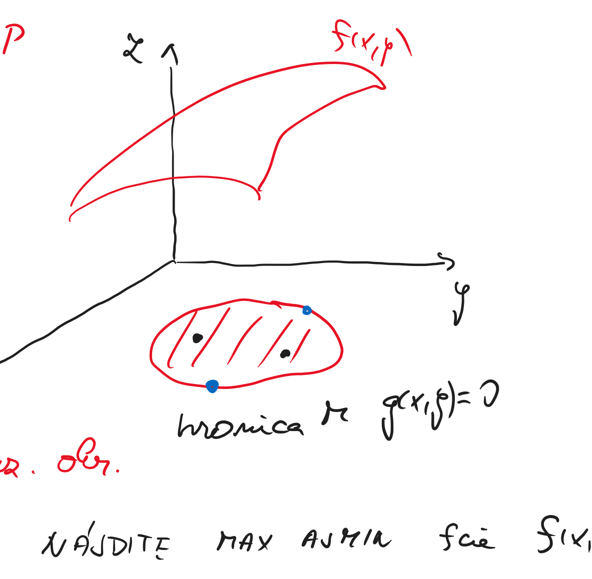


GL. MAX JE V NAJVÄČŠOM LOK MAX

GL MAX/MIN SÚ NA HRANICI $\langle a,b \rangle$
v a MIN
b MAX

GL. EXTRÉM NASTÁVA BUĎ V LOK. EX ALEBO NA HRANICI (F1P, F2P, F3P, ...)

F2P



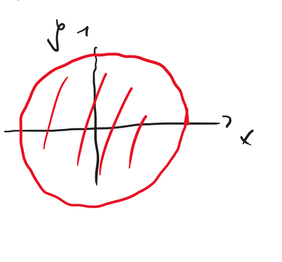
M - uz. obr.

1. NÁJDEME LOK. EXT. (STAČÍ SB)
fcie f ležiace vo vnútri M

2. NÁJDEME LOK EX (STAČÍ SB)
ležiace na hranici M (VIAZ. EX)

3. VÝBER NAJV. resp. NAJMEN. HODNOTY
GL. MAX GL. MIN

Pr. NÁJDITE MAX A MIN fcie $f(x,y) = x + y$ na M: $x^2 + y^2 \le 1$



1. L.E. (SB)
$f'_x = 1 \neq 0$ L.E. NIE SÚ

hranica
$x^2 + y^2 = 1$
t.j. $x^2 + y^2 - 1 = 0$
$g(x,y)$

2. VIAZ. EX
$L(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ to sme robili ...

v A1 VIAZ MAX = GL. MAX
A_2 VIAZ MIN = GL. MIN