PRAVDEPODOBNOSŤ A NÁHODNÉ JAVY

ÚVOD - opakovanie kombinatoriky stručne

Permutácia n (rôznych) prvkov je ľubovoľné usporiadanie týchto n prvkov.

Počet všetkých možných permutácií n prvkov je

$$P(n) = n! = n\cdot(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1$$

KALKULAČKA: x!

Variácia k-tej triedy z n (rôznych) prvkov je ľubovoľná usporiadaná k-tica z n prvkov.

ZÁLEŽÍ NA PORADÍ

Počet všetkých možných variácií k-tej triedy z n prvkov je

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

KALKULAČKA: nPr

Kombinácia k-tej triedy z n (rôznych) prvkov je ľubovoľná k-prvková podmnožina množiny obsahujúcej týchto n prvkov.

NEZÁLEŽÍ NA PORADÍ

Počet všetkých možných kombinácií k-tej triedy z n prvkov je

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

KALKULAČKA: nCr

PRÍKLAD

① Majme skupinu 9 športovcov. Koľkými spôsobmi ich vieme zoradiť na štarte?

$$P(9) = 9! = 362\,880$$

② Koľkými spôsobmi vedia obsadiť prvé 3 miesta?

$$V(9,3) = 504$$

③ Koľkými spôsobmi vieme z nich vytvoriť 3-členné družstvo?

$$C(9,3) = 84$$

Majme $M = \{1,2,3,4\}$.

Koľko 4-ciferných čísel vieme z nich vytvoriť?

$P(4) = 4! = 24$

Koľko 3-ciferných čísel vieme z nich vytvoriť?

$V(4,3) = 24$

$\{1,2,3\}$ 123
213
321
132
231
312

$\{1,2,4\}$

Koľko 3-prvkových podmnožín vieme z nich vytvoriť?

$C(4,3) = 4$ $\{1,2,3\}$ $\{1,2,4\}$ $\{1,3,4\}$ $\{2,3,4\}$

PRINCÍP NÁSOBENIA

Ak jedna činnosť pozostáva z n krokov, pričom
1. krok vytvoríme k_1 spôsobmi
2. krok k_2
⋮
n-tý krok k_n spôsobmi,

Potom celkový počet spôsobov ako vykonať túto činnosť je súčin $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$.

KEDY TO POUŽIŤ? – ak sa vyskytuje spojka A ZÁROVEŇ

PRINCÍP SČÍTANIA

Počet spôsobov ako vykonať nejakú činnosť, ktorá sa dá rozdeliť na n prípadov, pričom
1. prípad vykonáme l_1 spôsobmi.
2. prípad l_2
⋮
n-tý prípad l_n spôsobmi

a žiadne dva prípady sa nedajú vykonať súčasne, je súčet $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$.

KEDY TO POUŽIŤ? – vyskytuje sa spojka ALEBO

PRÍKLAD: Majme triedu, v ktorej je 12 dievčat a 15 chlapcov.

Koľkými spôsobmi viem vybrať skupinu 4 žiakov tak, aby v nej
a) nebolo žiadne dievča
b) bolo práve 1 dievča
c) bolo najviac 1 dievča
d) boli aspoň 3 dievčatá

NEZÁLEŽÍ NA PORADÍ

a) $\binom{15}{4} = 1365$

b) $\binom{12}{1} \cdot \binom{15}{3} = 5460$

← počet spôsobov výberu 3 chlapcov
2. KROK

↑ počet spôsobov výberu 1 dievčaťa &
1. KROK

$\binom{n}{1} = n$

c)
BUĎ 0 dievčat 1365
1 dievča 5460
ALEBO

SPOLU: $1365 + 5460 = 6825$

d)
BUĎ 3 d $\binom{12}{3} \cdot \binom{15}{1} = 3300$
4d $\binom{12}{4} = 495$
ALEBO

SPOLU: $3300 + 495 =$
$= 3795$

4 farby – z každej farby je 8 kusov

Majme sadu 32 kariet. Koľkými spôsobmi vieme vybrať 5 kariet tak, aby medzi nimi boli aspoň 3 rovnakej farby?

BUĎ 3 rovnakej farby $4 \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{24}{2} = \underline{\underline{61\,824}}$

ALEBO 4 rovnakej farby $4 \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{24}{1} = \underline{\underline{6720}}$

1. krok – 4

2. krok – $\binom{8}{4}$ – vybenie 4

3. krok – $\binom{24}{1}$ – vybenie 1 inej farby

ALEBO 5 rovnakej farby $4 \cdot \binom{8}{5} = \underline{\underline{224}}$

výber farby – 4

výber 5 kariet z nejakej farby – $\binom{8}{5}$

SPOLU : $61\,824 + 6720 + 224 = \underline{\underline{68\,768}}$

POKUS A JAV

Pokus – dej, ktorý môže nastať pri daných podmienkach

Jav – výsledok pokusu

jav
- istý I – jav, ktorý po pokuse nastane vždy
- nemožný $\emptyset$ – jav, ktorý po pokuse nikdy nenastane
- náhodný $A, B, C, \dots$ $A_1, A_2, A_3, \dots$

POKUS – hod kockou

nemožný jav – padne 8

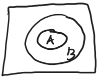
istý jav – padne číslo medzi 1–6

Pre náhodné javy platia obdobné vzťahy a operácie ako pre množiny. Preto ich znázorňujeme podobne.

Základné poznatky o javoch

① Def. Jav A nazývame podjavom javu B práve vtedy, keď z nastatia javu A vyplýva, že nastal aj jav B.

PÍŠEME : $A \subseteq B$



Hod kockou

A – padne 1

B – padne nepárne číslo

② Def. Javy A, B nazývame ekvivalentné práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$.

Píšeme : $A = B$

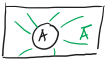
Hod kockou

A – padne 1 alebo 3 alebo 5
B – padne nepárne číslo

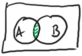
③ Def. Opačným javom k javu A nazývame jav $\bar{A}$, ktorý nastane práve vtedy, keď jav A nenastane.

Hod kockou

A – padne párne číslo
B – padne nepárne číslo



④ Def.: Prienikom javov A, B je jav $A \cap B$, ktorý nastane práve vtedy, keď nastane jav A aj jav B súčasne.

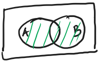


Hod kockou

A – padne 1, 2 alebo 3
B – padne nepárne číslo

$A \cap B$ – pad 1 alebo 3

⑤ Def. Zjednotením javov A, B je jav $A \cup B$, ktorý nastane práve vtedy, keď nastane aspoň jeden z javov A alebo B.



Hod kockou
A – padne 1, 2 alebo 3
B – padne nepárne číslo

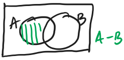
$A \cup B$ – padne 1, 2, 3, 5

PLATÍ:
$A \cup A = A$
$A \cup \bar{A} = I$
$A \cap \bar{A} = \emptyset$
$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

DISTRIBUTÍVNOSŤ:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morgan:
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

⑥ Def. Rozdielom javov A, B nazývame jav $A - B$, ktorý nastane práve vtedy, ak nastane jav A a súčasne nenastane jav B.



Hod kockou

A – padne nepárne číslo
B – padne 1

$A - B$ – padne 3 alebo 5

⑦ Def. Javy A, B nazývame nezlučiteľné (disjunktné) práve vtedy, keď nemôžu nastať súčasne

Platí: $A \cap = \phi$

Hod kockou

A - padne 2
B - padne 5

⑦ Úplný systém disjunktných javov

Def. Majme nezlučiteľné javy $H_1, H_2, \dots, H_n$ t.j.

$$H_i \cap H_j = \phi \quad \text{pre všetky } i, j,\ i \neq j$$

Ak naviac platí: $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = I$ tak javy $H_1, H_2, \dots, H_n$ tvoria úplný systém nezlučiteľných javov (hypotézy).

Hod kockou

H_1 - padne párne číslo
H_2 - padne nepárne číslo

H_1 - padne 1
H_2 - padne 2
H_3 - padne 3
H_4 - 4
H_5 - 5
H_6 - 6

⑧ Zložený jav

Def. Jav A nazývame zloženým práve vtedy, keď sa dá vyjadriť $A = A_1 \cup A_2$

$A \neq A_1 \neq \phi$
$A \neq A_2 \neq \phi$

Hod kockou
A - padne nep. číslo $A = A_1 \cup A_2$

A_1 - padne 1
A_2 - padne 3 alebo 5

⑨ Elementárny jav

Def. Jav A nazývame elementárny práve vtedy, keď nie je zložený

Hod kockou
A_1 - padne 1 A_2 - je zložený

KLASICKÁ DEFINÍCIA PRAVDEPODOBNOSTI

Def. Pre ľubovoľný jav A definujeme jeho pravdepodobnosť takto:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{počet výsledkov pokusu priaznivých javu A}}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu}}$$

Vlastnosti:

Pre každý jav A platí: $0 \leq P(A) \leq 1$

Pre istý jav platí: $P(I) = 1$

Pre nemožný jav platí: $P(\phi) = 0$

Pre opačný jav platí: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Pre ľubovoľné javy A, B platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pre ľubovoľné javy A, B, C platí:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Pre disjunktné javy A, B platí: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$A \cap B = \emptyset$

PRÍKLADY: KMTI → predmet NMPaMŠ → prílohy

DAŇO, OSTERTAGOVÁ ....
BUŠA, PIRČ, SCHRÖTER ...

7.7. Hod 2 kockami. Vypočítajme pravdepodobnosť, že

a) nepadne 6 – jav A $\quad P(A) = \frac{25}{36} \quad \boxed{1-5} \quad \boxed{1-5}$

b) padne aspoň 1 šestka – jav B $\quad B = \bar{A}$

$P(B) = 1 - P(A) = \frac{11}{36}$

c) súčet bodov je 10 – jav C $\quad P(C) = \frac{3}{36}$

$10 = 5+5 = 4+6 = 6+4$

d) súčet bodov je aspoň 11 – jav D

$⑪ = 6+5 = 5+6$

$⑫ = 6+6$

$P(D) = \frac{3}{36}$

e) súčet bodov je najviac 9 – jav E

$2, 3 \ldots 9$

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{\overset{=10}{③} + \overset{=11}{②} + \overset{=12}{①}}{36} = \frac{30}{36}$$

$\boxed{10, 11, 12}$

7.19. Zo sady 32 kariet vyberieme 5. A je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú aspoň 3 rovnakej farby.

jav A

$$P(A) = \frac{68\,765}{\binom{32}{5}} = 0{,}3415$$

Máme čísla 1, 2, …, 90.

Koľko z nich je deliteľných 3? $\quad \frac{90}{3} = 30$

Koľko z nich je deliteľných 7? $\quad \lfloor \frac{90}{7} \rfloor = 12 \leftarrow$ dolná celá časť

$\lfloor 4{,}25 \rfloor = 4$

$\lfloor 4{,}99 \rfloor = 4$

7. 20.

Vypočítajme pravdep. toho, že číslo náhodne zvolené spomedzi čísel 1…90 je deliteľné:

a) štyrmi alebo piatimi ?

A – je deliteľné 4
B – 5

b) dvoma, troma alebo piatimi ?

a) $$P(A\cup B) = P(A)+P(B) - P(A\cap B) = \frac{\lfloor \frac{90}{4}\rfloor}{90} + \frac{\lfloor \frac{90}{5}\rfloor}{90} - \frac{\lfloor \frac{90}{20}\rfloor}{90} =$$

$A\cap B$ – číslo deliteľné 20

$$= 0,4$$

b) A – je deliteľné 2
B 3
C 5

$A\cap B$ – 6
$A\cap C$ – 10
$B\cap C$ – 15
$A\cap B\cap C$ – 30

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C) =$$

$$= \frac{\lfloor \frac{90}{2}\rfloor}{90} + \frac{\lfloor \frac{90}{3}\rfloor}{90} + \frac{\lfloor \frac{90}{5}\rfloor}{90} - \frac{\lfloor \frac{90}{6}\rfloor}{90} - \frac{\lfloor \frac{90}{10}\rfloor}{90} - \frac{\lfloor \frac{90}{15}\rfloor}{90} + \frac{\lfloor \frac{90}{30}\rfloor}{90} =$$

$$= 0,7333$$

Majme v krabici 8 kusov 1€ mincí a 12 kusov 2 € mincí.

a) Náhodne vyberieme jednu mincu. Aká je pravdepodobnosť, že je to 1€?

$$P(A) = \frac{8}{20} = 0,4$$

jav A

b) Náhodne vyberieme 3 mince. Aká je pravdepodobnosť, že sme vybrali 4 € súčet?

jav B

$$P(B) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{20}{3}} = 0,2947$$

$$4 = 1+1+2$$

Majme 32 kariet. Náhodne vyberieme 3 karty.

Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere je

a) práve 1 eso jav A

b) aspoň 1 eso   jav B

1, 2, 3, 4

c) karty práve 2 farieb   jav C

a) $P(A) = \dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{2}}{\binom{32}{3}} = \underline{\underline{0,3048}}$

b) $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \dfrac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = \underline{\underline{0,3395}}$

žiadne eso nevyberiem

c) $P(C) = \dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{1}\binom{8}{2} + \binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{1}}{\binom{32}{3}} = \underline{\underline{0,5419}}$

FARBA 1   FARBA 2

① 2   ② 1

Domáca úloha: 7.2. 7.13.
7.3. 7.15.
7.8. 7.21.