

## Kombinatorika

1. a) Koľkými spôsobmi môžeme usadiť za stôl päť hostí?  
b) Ako by sa zmenilo rozsadenie, ak jeden hosť chce sedieť na prvom mieste?  
[a) 120 , b) 24]
2. Na poličke treba rozostaviť vedľa seba 3 zelené, 2 červené a 2 žlté hrnčeky.  
a) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť?  
b) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak hrnčeky rovnakej farby stoja vedľa seba?  
c) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak hrnčeky rovnakej farby stoja vedľa seba, ak navyše jeden červený hrnček má uško a druhý nie?  
[a) 210, b) 6, c) 12]
3. Trinásť svadobčanov sa nemohli dohodnúť, kto kde bude stáť na svadobnej fotografii. Ženich navrhol, aby sa urobili všetky možné zostavy svadobčanov na fotografiách. Koľko fotografií treba urobiť?  
[6 227 020 800]
4. Dané sú tri prvky A, B, C.  
a) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak sa prvky nemôžu opakovať?  
b) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak sa prvok A opakuje raz, prvok B sa opakuje 2 - krát a prvok C raz.  
[a) 6, b) 12]
5. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné hodiť troma kockami súčet 11?  
[27]
6. Štyri detektívky a tri historické knihy treba usporiadať na poličke tak, aby boli zoradené najprv detektívky a potom historické knihy. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť?  
[144]
7. Koľko je párnych prirodzených čísel, v zápise ktorých sa vyskytujú len cifry 2, 3, 4, 5 maximálne raz?  
[32]
8. Koľko je 4 – ciferných prirodzených čísel deliteľných 4, v ktorých sa vyskytujú iba číslice 1, 2, 3, 4, 5 a každé z nich sa môže ľubovoľne opakovať.  
[125]
9. Koľko je všetkých 3 – ciferných prirodzených čísel?  
[900]
10. Angličania obyčajne dávajú svojim deťom niekoľko mien. Koľkými spôsobmi sa dá pomenovať novorodenec nie viac ako 3 menami, ak je k dispozícii 300 rôznych mien?  
[26 820 600]

11. a) Hádzeme troma kockami – bielou, modrou, červenou. Koľko rôznych výsledkov môžeme dostať?  
b) Na bielej kocke sme hodili jednotku. Hádzeme už len zo zvyšnými dvoma kockami. Koľko rôznych výsledkov môžeme dostať?  
[a) 216, b) 36]
12. Vo vrecku je 10 rôznych lístkov označených číslicami 1 až 10. Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme postupne, s prihliadnutím na poradie vybrať tri z nich, ak vybrané lístky sa do vrecka a) nevracajú, b) vracajú.  
[a) 720, b) 1000]
13. Koľko prirodzených trojciferných čísel sa dá zostaviť z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, ak sa cifry nesmú opakovať? Koľko z týchto čísel je deliteľných piatimi?  
[a) 120, b) 20]
14. Hokejový zápas sa skončil víťazstvom domácich 11:7, pričom po 1. tretine bol stav 4:6, po druhej 9:7. Koľko rôznych priebehov mohol mať tento zápas vzhľadom na domácich?  
[1260]
15. Koľko trikolór možno zostaviť zo 7 farieb?  
[35]
16. Desať ľudí sa má ubytovať v 3 izbách. Jedna izba je štvorposteľová a dve trojposteľové. Koľkými spôsobmi možno hostí rozmiestniť v týchto izbách?  
[4200]
17. Na kružnici je rozmiestnených 9 bodov. Koľko existuje rôznych trojuholníkov, ktorých vrcholy sú tieto body?  
[84]
18. Skúšajúci má pripravených 20 príkladov zo štatistiky a 30 z pravdepodobnosti. Na písomku chce dať:  
a) 3 príklady zo štatistiky a 2 z pravdepodobnosti, b) 1 z príklad zo štatistiky a 5 z pravdepodobnosti. Koľko má možností zostavenia rôznych zadaní?  
[a) 495 900, b) 2 850 120]
19. Na pomaturitnom stretnutí po rokoch bolo 23 spolužiakov. Účastníci si navzájom štrngli pohármi. Koľko sa uskutočnilo štrngnutí?  
[253]
20. Hokejové družstvo má 20 hráčov: 13 útočníkov, 5 obrancov a 2 brankárov. Koľko rôznych zostáv môže tréner utvoriť, ak zostava má mať 3 útočníkov, 2 obrancov a 1 brankára?  
[5720]
21. Koľkými spôsobmi je možné na štvorcovej šachovnici so 64 poľami vybrať tri polia tak, aby všetky tri neležali v tom istom stĺpci?  
[41 216]

## Pravdepodobnosť

1. Na policičke je náhodne rozostavených 20 rôznych kníh, medzi ktorými sú 4 knihy o počítačoch. Aká je pravdepodobnosť, že tieto štyri knihy sú postavené vedľa seba?  
[0,0035]
2. Každá z troch krabíc obsahuje 10 lístkov očíslovaných od 1 do 10. Z každej krabice je náhodne vytiahnutý jeden lístok. Určte pravdepodobnosť toho, že súčet čísel na vytiahnutých lístkoch je väčší ako 4?  
[0,996]
3. Máme 10 vstupeniek po 200 eur, 3 vstupenky po 300 eur a 2 vstupenky po 500 eur. Náhodne vyberieme tri vstupenky. Určte pravdepodobnosť, že aspoň dve z týchto vstupeniek budú mať rovnakú cenu?  
[0,8681]
4. Zo sady 32 kariet vyberieme náhodne 5 kariet. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi nimi budú aspoň tri karty s rovnakým znakom?  
[0,3415]
5. Chlapec dostal od dievčaťa, ktoré sa mu páči telefónne číslo napísané na papieriku. Pri vyberaní z vrecka mu papierik padol do vody a posledné dvojčíslenie sa rozmazalo. Pamätal si však, že tieto číslice boli rôzne a nepárne. Zvolil ich teda náhodne. Aká je pravdepodobnosť, že sa dievčaťu dovolal?  
[0,05]
6. Určte pravdepodobnosť toho, že pri hodení tromi kockami padne súčet bodov väčší ako 5.  
[0,9537]
7. Na policičke je náhodne rozostavených 17 rôznych kníh, medzi ktorými trojdielny román. Určte pravdepodobnosť toho
  - a) že diely románu sú postavené vedľa seba,
  - b) že diely románu sú usporiadané vedľa seba podľa náväznosti zľava doprava.[a) 0,022, b) 0,20538]
8. V lotérii MATES sa žrebuje 5 čísel z 35. Aká je pravdepodobnosť, že ak hráč natipuje 5 čísel, tak z vyžrebovaných čísel uhádne a) práve 3 čísla, b) aspoň 4 čísla.  
[a) 0,0134, b) 0,000046]
9. Číslice 1 - 5 sú po jednej napísané na piatich lístkoch. Náhodne vyberieme tri lístky a uložíme ich vedľa seba. Určte pravdepodobnosť, že takto vzniknuté trojčiferné číslo bude párne.  
[0,4]

10. V krabici je 7 bielych a 7 čiernych guľôčok. Určte pravdepodobnosť, že medzi šiestimi náhodne vybranými guľôčkami bude práve  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  bielych guľôčok.  
[0,0023; 0,0490; 0,2448; 0,4079; 0,2448; 0,0023]
11. Medzi 49 výrobkami je 6 nepodarkov. Na kontrolu kvality náhodne vyberieme 6 kusov. Určte pravdepodobnosť toho, že medzi nimi bude práve  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  nepodarkov.  
[0,436; 0,413; 0,132; 0,018; 0,001;  $1,845 \cdot 10^{-5}$ ;  $7,151 \cdot 10^{-8}$ ]
12. Z urny, v ktorej je 6 bielych a 4 čierne guľky, vytiahneme 4 guľky (bez vrátenia). Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že a) medzi vytiahnutými guľkami budú najviac dve čierne guľky;  
b) všetky guľky budú rovnakej farby.  
[a) 0,881; b) 0,07619]
13. Triedny učiteľ zistil, že 12 z 20 študentov býva na stredoškolskom internáte. Náhodne vyberieme 8 študentov. Aká je pravdepodobnosť, že a) 6 študenti bývajú na stredoškolskom internáte,  
b) najmenej 3 študenti bývajú na stredoškolskom internáte.  
[a) 0,20538; b) 0,98456]
14. Školský prieskum zistil, že 7 z 30 študentov chodí do školy pešo. Náhodne vyberieme postupne štyroch študentov. Aká je pravdepodobnosť, že prvý a druhý vybraný študent chodí do školy pešo, ale tretí a štvrtý nechodí do školy pešo?  
[0,03231]
15. Pravdepodobnosť toho, že ženatý muž pravidelne sporí je 0,6, pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí je 0,5 a pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí, ak pravidelne sporí jej muž, je 0,4. Určte pravdepodobnosť toho, že :  
a) obaja pravidelne sporia,  
b) pravidelne sporí ženatý muž, ak pravidelne sporí jeho žena,  
c) aspoň jeden z manželov pravidelne sporí.  
[a) 0,24, b) 0,48, c) 0,86]
16. Pravdepodobnosť určitého ochorenia je 5%. Test na určenie prítomnosti ochorenia má spoľahlivosť 83%. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná testovaná osoba má pozitívny výsledok testu?  
[0,203]
17. Dvaja robotníci vyrábajú tie isté výrobky, pričom prvý vyrobí dvakrát viac výrobkov ako druhý za rovnakú dobu. Pravdepodobnosť vyrobenia nepodarku je u 1. robotníka 0,02 a u 2. robotníka 0,01. Zo skladu, kde sú uložené všetky výrobky, náhodne vyberieme jeden výrobok.  
a) Aká je pravdepodobnosť, že daný výrobok nebude nepodarok?  
b) Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný výrobok bol vyrobený prvým robotníkom, ak bol nepodarok?  
[a) 0,9833, b) 0,7984]

18. Z krabice, ktorá obsahuje 6 čiernych a 9 bielych guľí, náhodne vyberieme jednu guľu. Potom ju vrátíme späť a pridáme ešte 5 guľí tej istej farby, akej bola vytiahnutá guľa.
- Aká je pravdepodobnosť toho, že v druhom ťahu vytiahneme z krabice bielu guľu?
  - Aká je pravdepodobnosť, že v prvom ťahu sme vytiahli čiernu guľu, ak v druhom ťahu vytiahneme z krabice bielu guľu?
- [a) 0,6, b) 0,3]
19. Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába 70% kvalitných výrobkov, druhý 80% kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- náhodne vybraný výrobok je kvalitný;
  - náhodne vybraný výrobok bol vyrobený druhým automatom, ak je kvalitný.
- [a) 0,725, b) 0,2759]
20. Istá výrobná chyba sa vyskytuje u 15% práčok. Pri práčkách s touto výrobnou chybou dochádza k poruche v záručnej dobe s pravdepodobnosťou 0,6, kým u ostatných len s pravdepodobnosťou 0,1. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- náhodne vybraná práčka sa pokazí v záručnej dobe;
  - náhodne vybraná práčka má výrobnú chybu, ak sa pokazila v záručnej dobe.
- [a) 0,175, b) 0,5143]
21. V triede je 60% dievčat. Z nich 70% je nižších ako 170 cm. Z chlapcov je nižších ako 170 cm len 30%.
- Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný žiak je nižší ako 170 cm.
  - Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný žiak je chlapec, ak je nižší ako 170 cm.
- [a) 0,54, b) 0,222]
22. Pomer počtu výrobkov vyrobených na štyroch strojoch je  $4 : 6 : 5 : 5$  je pomer. Pravdepodobnosť produkcie výrobku prvej akosti je pre jednotlivé stroje v danom poradí takáto: 0,7; 0,6; 0,8 a 0,7.
- Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný výrobok je prvej akosti.
  - Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný výrobok bol vyrobený na prvom stroji, ak je prvej akosti.
- [a) 0,695, b) 0,2014]
23. 30% študentov študuje priebežne počas semestra. Z nich 90% urobí skúšku v riadnom termíne. Zo študentov, ktorí neštudujú priebežne počas semestra len 20% urobí skúšku v riadnom termíne.
- Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraný študent urobil skúšku v riadnom termíne.
  - Náhodne vybraný študent urobil skúšku v riadnom termíne. Aká je pravdepodobnosť, že študoval priebežne počas semestra?
- [a) 0,41, b) 0,6585]
24. Pre maturitnú skúšku z matematiky majú študenti 30 otázok. Študent sa naučil 12 otázok priemerne a 18 otázok ovláda výborne. Študent odpovedá na dve vytiahnuté otázky. Pravdepodobnosť, že zmaturuje aspoň na dvojku, je:
- v prípade vytiahnutia dvoch priemerne naučených otázok 0,3;

- v prípade vytiahnutia dvoch výborne naučených otázok 0,8;
- v prípade vytiahnutia jednej priemerne a jednej výborne naučenej otázky 0,5. Vypočítajte:
  - a) Aká je pravdepodobnosť, že študent zmaturoje aspoň na dvojku?
  - b) Ak študent zmaturoval aspoň na dvojku, aká je pravdepodobnosť, že si vytiahol dve otázky, ktoré sa naučil priemerne?

[a) 0,5752; b) 0,0791]

25. Predpokladajme, že hádzeme súčasne dvomi mincami. Minca má dve strany – hlava a znak.

Vykonáme štyri hody. Aká je pravdepodobnosť, že

- a) pri troch hodoch zo štyroch hodíme dve hlavy;
- b) aspoň (najmenej) pri jednom hode zo štyroch hodíme dve hlavy.

[a) 0,047; b) 0,6836]

26. Pravdepodobnosť toho, že basketbalista trafi do koša je 0,7. Určte pravdepodobnosť toho, že basketbalista pri šiestich nezávislých hodoch:

- a) práve dvakrát trafi do koša;
- b) aspoň dvakrát trafi do koša.

[a) 0,0595; b) 0,9891]

27. Test pozostáva z 8 otázok, pričom pri každej otázke študent vyberá z 3 možností (práve 1 je správna). Ak sa študent učil, je pravdepodobnosť správnej odpovede pri každej z otázok 0,7. Ak sa neučil, volí odpovede náhodne. Aká je pravdepodobnosť toho, že

- a) študent správne odpovie aspoň na šesť otázok, ak sa učil;
- b) študent správne odpovie aspoň na šesť otázok, ak sa neučil,
- c) náhodne vybraný študent odpovie aspoň na šesť otázok, ak vieme, že tretina študentov sa učila.

[a) 0,55177; b) 0,01966, c) 0,19703]

28. Zistilo sa, že semienko vyklíči s pravdepodobnosťou 80%. Ak zasejeme 10 semiačok, aká je pravdepodobnosť, že

- a) vyklíči práve 7 semiačok,
- b) vyklíčia aspoň 4 semiačka.

[a) 0,20133; b) 0,99914]

29. Z urny, v ktorej je 8 bielych a dve čierne guľky, sa ťahá po jednej guľke, pričom sa po každom ťahu guľka vráti späť do urny. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- a) medzi šiestimi postupne vytiahnutými guľkami budú tri biele guľky;
- b) medzi ôsmimi postupne vytiahnutými guľkami budú aspoň štyri biele guľky.

[a) 0,08192; b) 0,98959]

30. Výskum ukázal, že študent, ktorý sa učil, má 80 % - nú šancu výberu správnej odpovede pri teste s výberom odpovedí. Test má 10 otázok, pri každej otázke si vyberáme z 3 odpovedí.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že študent ktorý sa učil, odpovie aspoň na 8 otázok správne?
- b) Aká je pravdepodobnosť, že študent ktorý sa neučil (vyberá odpovede náhodne), odpovie správne na maximálne 5 otázok?

[a) 0,67780; b) 0,92344]

31. Terč tvorí kruh K a dve medzikružia M1 a M2. Zásah do kruhu K znamená 10 bodov, zásah do medzikružia M1 znamená 5 bodov a do M2 znamená 0 bodov. Pravdepodobnosť zásahu kruhu K je 0,5, pravdepodobnosť zásahu medzikružia M1 je 0,3 a pravdepodobnosť zásahu medzikružia M2 je 0,2. Nech náhodná premenná X je rovná počtu získaných bodov pri 2 nezávislých výstreloch. Určte:
- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
  - strednú hodnotu náhodnej premennej X;
  - pravdepodobnosti  $P(X \leq 10)$ ,  $P(5 < X \leq 15)$ ;
  - Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X.

[a) 0,67780; b) 0,92344]

32. Predpokladajme, že hádzeme súčasne dvoma kockami. Vykonáme 3 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme súčet 9.
- Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú X (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov).
  - Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.
  - Vypočítajte  $P(0 < X \leq 2)$ ;  $P(X > E(X))$ .
  - Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X.

[b)  $E(X) = 13$ ,  $D(X) = 8/27$ , c)  $P(0 < X \leq 2) = 216/729$ ,  $P(X > E(X)) = 217/729$ ]

33. Pravdepodobnosť vyklíčenia každej kôstky avokáda je 0,9. Zasadili sme 4 kôstky. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet kôstok zo 4, ktoré vyklíčia.
- Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú X.
  - Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.
  - Vypočítajte pravdepodobnosť, že aspoň dve kôstky zo štyroch vyklíčia.

[a)  $P(0) = 0,0001$ ;  $P(1) = 0,0036$ ;  $P(2) = 0,0486$ ;  $P(3) = 0,2916$ ;  $P(4) = 0,6561$ ; b)  $E(X) = 3,6$ ,  $D(X) = 0,36$ ,  
c)  $P(X \geq 2) = 0,9963$ ]

34. Hádzeme mincou, ktorá na hlavu a znak. Urobíme za sebou 4 hodenia mincou. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodení zo 4, pri ktorých padol na minci znak.
- Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú X.
  - Vypočítajte strednú hodnotu a modus náhodnej premennej X.
  - Vypočítajte pravdepodobnosť, že najviac raz zo štyroch hodení padne znak na minci.
  - Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X a zostrojte graf  $F(X)$ .

[a)  $P(0) = P(4) = 0,0625$ ;  $P(1) = P(3) = 0,25$ ;  $P(2) = 0,375$ ; b)  $E(X) = 2$ ,  $M_0(X) = 2$ ; c)  $P(X \leq 1) = 0,3125$ ]

35. Zo skúseností zamestnanca poisťovne vyplynulo, že poistné plnenie v rámci poistenia domácnosti je vyššie ako 2500 eur s pravdepodobnosťou 0,3. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet poistných plnení z 5 budúcich plnení, ktoré budú vyššie ako 2500 eur.
- Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú X.
  - Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.
  - Vypočítajte pravdepodobnosť, že najviac dve plnenia budú vyššie ako 2500 eur?
  - Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X a zostrojte graf  $F(X)$ .

[a)  $P(0) = 0,16807$ ;  $P(1) = 0,36015$ ;  $P(2) = 0,3087$ ;  $P(3) = 0,1323$ ;  $P(4) = 0,02835$ ;  $P(2) = 0,300243$ ; b)  $E(X) = 1,5$ ,  $D(X) = 1,05$ ; c)  $P(X \leq 2) = 0,83692$ ]

36. V triede je 15 študentov, z ktorých jedna tretina študuje s vyznamenaním. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu vyznamenaných študentov medzi tromi náhodne vybranými študentmi. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej  $X$  (pravdepodobnostnú tabuľku);
- pravdepodobnosť, že medzi tromi náhodne vybranými študentmi bol aspoň jeden vyznamenaný študent.
- strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ .
- distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

[ a)  $\frac{x_i}{p_i} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \frac{120}{455} & \frac{225}{455} & \frac{100}{455} & \frac{10}{455} \end{array} \right.$ ; b)  $E(X) = 1$ ; c)  $P(0 < X \leq 2) = \frac{325}{455}$ ,  $P(X > E(X)) = \frac{120}{455}$  ]

37. V súbore 10 výrobkov je osem prvej kvality a dva nepodarky. Výberom bez vrátenia je náhodne vybraných 5. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu výrobkov prvej kvality medzi 5 vybranými. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej  $X$  (pravdepodobnostnú tabuľku);
- strednú hodnotu, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej  $X$ .

[b)  $E(X) = 4$ ,  $D(X) = 4/9$ ; c)  $\delta(X) = 2/3$ ]

**Použitá literatúra:**

Richtáriková, S., Kyseľová, D.: Matematika – pomôcka pre maturantov a uchádzačov o štúdium na vysokých školách. Enigma. 2000

<https://www.priklady.com/sk/index.php/kombinatorika/variacie-permutacie-kombinacie>

<https://www.priklady.eu/sk/riesene-priklady-matematika/kombinatorika/variacie.alej>

Daňo, I., Ostertagová, E.: Numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika v príkladoch. Elfa. Košice. 2007

Myšková, H.: Súbor príkladov na precvičenie č.2., Príklady na precvičene a a2 záp. písomku

<https://www.hackmath.net/sk/priklady-ulohy/binomicke-rozdelenie>

<http://matika.fei.stuba.sk/KMAT/MatematStatistikaCvicenia?action=AttachFile&do=get&target=MaSta05.pdf>