

Matematika 2 – 11.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Zopakujte si:

1. Zápis $\frac{\partial f}{\partial x} = z'_x$ je parciálna derivácia funkcie $z = f(x, y)$ prvého stupňa podľa x

2. Stacionárny bod funkcie $z = f(x, y)$ je bod, v ktorom je parciálna derivácia 1. rádu rovná nule

3. Derivácia funkcie $f(x) = 3xy^4$ podľa x je $3y^4$

4. Pri derivácii $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = z'_y$ je konštantné

- a) x
- b) y
- c) z .

5. Derivácia funkcie $f(x) = 3xy^4$ podľa y je

- a) $3xy^4$
- b) $12xy^3$
- c) $3y^4$.

6. Funkcia $z = f(x, y)$ má lokálny extrém len v kritickom bode

DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných

Funkcia dvoch premenných $z = f(x, y)$

*parciálna derivácia **prvého rádu** funkcie $z = f(x, y)$ podľa premennej x*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z'_x \quad y \text{ je konš.}$$

*parciálna derivácia **prvého rádu** funkcie $z = f(x, y)$ podľa premennej y*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z'_y \quad x \text{ je konš.}$$

parciálna derivácia druhého rádu funkcie $z = f(x,y)$ podľa premennej x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z''_{xx}$$

parciálna derivácia druhého rádu funkcie $z = f(x,y)$ podľa premennej y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z''_{yy}$$

z''_{xx} - parciálna derivácia funkcie z'_x podľa x

z''_{xy} - parciálna derivácia funkcie z'_x podľa y

z''_{yx} - parciálna derivácia funkcie z'_y podľa x

z''_{yy} - parciálna derivácia funkcie z'_y podľa y

Pr. 1 : Vypočítajte derivácie druhého radu podľa x a y funkcie

$$z = f(x, y) = 2x^3 + y^z x - 5y .$$

DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

Lokálne extrémny funkcie dvoch premenných

Stacionárny bod - bod, v ktorom je parciálna derivácia 1. rádu funkcie $z = f(x,y)$ rovná nule:

$$z'_x = 0, z'_y = 0$$

Kritický bod - je stacionárny bod alebo bod, v ktorom neexistuje parciálna derivácia 1. rádu

Funkcia $z = f(x,y)$ má lokálny extrém len v kritickom bode.

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému: nech bod A je stacionárny bod funkcie $z = f(x,y)$ a má spojité derivácie 1 a 2. rádu v okolí A:

I. ak
$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} z''_{xx}(A) & z''_{xy}(A) \\ z''_{yx}(A) & z''_{yy}(A) \end{vmatrix} > 0$$

potom, ak $\Delta_1(A) = z''_{xx}(A) \neq 0$, tak $z = f(x,y)$ má v **A lokálny extrém**

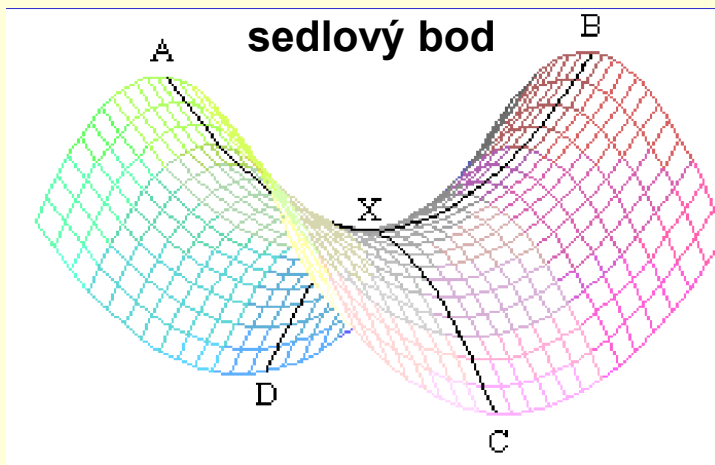
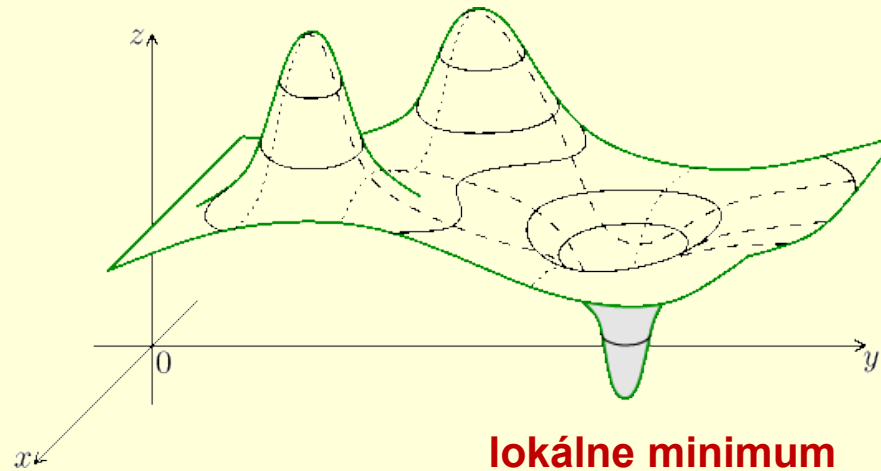
a) lokálne maximum, ak súčasne platí $\Delta_1(A) < 0$

b) lokálne minimum, ak súčasne platí $\Delta_1(A) > 0$

II. ak $\Delta_2(A) < 0$, tak $z = f(x,y)$ nemá v **A lokálny extrém**, bod A je sedlový bod

III. ak $\Delta_2(A) = 0$, **nevieme rozhodnúť o extrém**

lokálne maximum

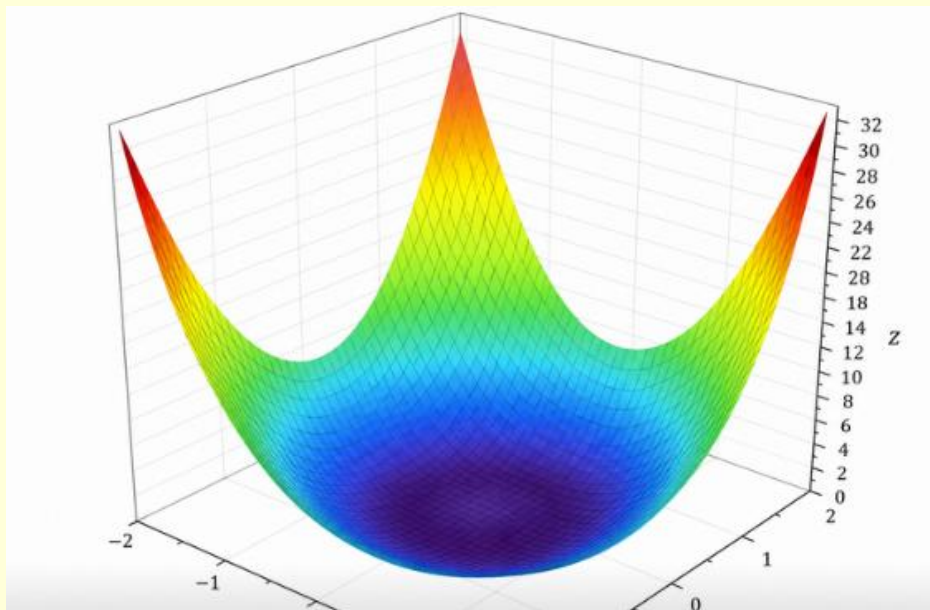


graf v tomto bode pripomína **sedlo**:
v jednom smere funkcia rastie (minimum) body A, B
a v inom klesá (maximum) body C, D

Ak nemožno rozhodnúť o lokálnom extréme pomocou druhej derivácie, keď $D = 0$, v takom bode je **povrch funkcie príliš plochý alebo má špeciálny tvar**, ktorý výpočet cez determinant nedokáže klasifikovať.

Napr: graf funkcie $z = x^4 + y^4$

je to **hladká misa (povrch)** otvorená nahor, najnižší bod je v strede: $(0, 0, 0)$ stacionárny bod, od stredu po osi x alebo y , hodnota rastie ako štvrtá mocnina → **veľmi strmé okraje**



Pr. 1 – 88 / 8: Nájdite lokálne extrémym funkcie $z = x^2 + y^2 + 10y - 5$

1. Určime stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule
2. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu
3. Určime $\Delta_2(\mathbf{A})$, $\Delta_1(\mathbf{A})$ a zistíme, či funkcia má lokálne extrémym

Pr. 2 – 88 / 6: Nájdite lokálne extrémym funkcie $z = 8 - x^2 - y^2 + 6y$

1. Určime stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule

$$z'_x = -2x \quad z'_y = -2y + 6$$

$$\begin{aligned} z'_x = -2x = 0 & & z'_y = -2y + 6 = 0 \\ x = 0 & & -2y = -6 \\ & & y = 3 \end{aligned}$$

stacionárny bod **A** [0, 3]

2. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu

$$\begin{aligned} z''_{xx} = -2 & & z''_{xy} = 0 \\ z''_{yx} = 0 & & z''_{yy} = -2 \end{aligned}$$

3. Určime $\Delta_2(\mathbf{A})$, $\Delta_1(\mathbf{A})$ a zistíme, či funkcia má lokálne extrémym

$$\Delta_2(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_1(\mathbf{A}) = z''_{xx}(\mathbf{A}) = -2 < 0$$

v bode **A** má funkcia lokálne maximum

Pr. 3 – 88 / 27: Nájdite lokálne extrémny funkcie

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy - 4$$

Pr. 4 – 89 / 42: Nájdite lokálne extrémym funkcie

$$z = x^4 + 2y^2 + 4xy$$

1. Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule

$$z'_x = 4x^3 + 4y \quad z'_y = 4y + 4x$$

$$\begin{aligned} z'_y = 4y + 4x &= 0 \\ 4y &= -4x \\ y &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_x = 4x^3 + 4y &= 0 \\ 4x^3 + 4(-x) &= 0 \\ 4x(x^2 - 1) &= 0 \\ 4x = 0, (x^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & x^2 = 1 &\rightarrow x = \pm 1 \\ y_1 &= 0 & y_2 = -x_2 = -1, & y_3 = -x_3 = 1 \end{aligned}$$

stacionárne body A [0, 0], B [1, -1], C [-1, 1]

2. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 12x^2 & z''_{xy} &= 4 \\ z''_{yx} &= 4 & z''_{yy} &= 4 \end{aligned}$$

3. Určíme Δ_2 , Δ_1 pre stacionárne body a zistíme, či funkcia má v týchto bodoch lokálne extrém

	A	B	C
$z''_{xx} = 12x^2$	0	$12 \cdot 1^2 = 12$	$12 \cdot (-1)^2 = 12$
$z''_{xy} = 4$	4	4	4
$z''_{yx} = 4$	4	4	4
$z''_{yy} = 4$	4	4	4

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 16 < 0, \quad \Delta_1(A) = z''_{xx}(A) = 0$$

v bode A funkcia nemá extrém, sedlový bod

$$\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 16 > 0, \quad \Delta_1(B) = z''_{xx}(B) = 12 > 0$$

v bode B má funkcia extrém, lokálne minimum

$$\Delta_2(C) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 16 > 0, \quad \Delta_1(C) = z''_{xx}(C) = 12 > 0$$

v bode C má funkcia extrém, lokálne minimum

Kontrolka: Vyberte správne odpovede.

1. Ak $\Delta_2(A) = 2$ a $\Delta_1(A) = -3$, potom funkcia $z = f(x,y)$ v bode A
 - a) nemá lokálny extrém,
 - b) má lokálne minimum,
 - c) má lokálne maximum.
2. Funkcia $z = f(x,y)$ nemá v bode C lokálny extrém, ak
 - a) $\Delta_2(C) = 0$,
 - b) $\Delta_2(C) > 0$,
 - c) $\Delta_2(C) < 0$,
 - d) $\Delta_1(C) < 0$.
3. Ak $\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$, potom $\Delta_1(A)$ je dané
 - a) 5,
 - b) 0,
 - c) 2,
 - d) - 5.

Pr. 5 – 89 / 40: Nájdite lokálne extrémym funkcie

$$z = 2x^3 + y^2x - 216x + 5$$

Pr. 6 – 88 / 19: Nájdite lokálne extrémym funkcie

$$z = x^2 + y^2 + xy + 5x - 5y + 3$$

1. Určime stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule

$$\begin{aligned} z'_x = 2x + y + 5 & \quad z'_x = 2x + y + 5 = 0 & \quad z'_y = 2y + x - 5 & \quad z'_y = 2y + x - 5 = 0 \\ & \quad y = -2x - 5 & & \quad 2(-2x - 5) + x - 5 = 0 \\ & & & \quad -4x - 10 + x - 5 = 0 \\ & & & \quad -3x = 15 \\ & \quad y = -2 \cdot (-5) - 5 = 10 - 5 = 5 & & \quad x = -5 \\ & \quad y = 5 & & \end{aligned}$$

stacionárny bod A [-5, 5]

2. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 2 & \quad z''_{xy} &= 1 \\ z''_{yx} &= 1 & \quad z''_{yy} &= 2 \end{aligned}$$

3. Určime $\Delta_2(A)$ $\Delta_1(A)$ a zistíme, či funkcia má lokálny extrém

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0, \quad \Delta_1(A) = z''_{xx}(A) = 2 > 0$$

v bode A funkcia má extrém, lokálny minimum

Pr. 7 – 89 / 54: Nájdite lokálne extrémym funkcie

$$z = xy + \ln x + y^2$$

Informácie k 2.ZP

20.5.2026 7:30-9:00: miestnosť P25: št.sk. D4,D9 (cvičenie utorok 10:50, Varga)

čas: 80 minút

skladá sa z dvoch častí: teoretická (test **15** bodov)
praktická (príklady **40** bodov - 7 príkladov)

Okruhy: neurčitý integrál – goniometrické funkcie, racionálna, iracionálna
určitý integrál – substituícia, per partes
obsah časti roviny
objem rotačného telesa
parciálne derivácie prvého rádu danej funkcie
lokálne extrémny danej funkcie
viazané extrémny danej funkcie

Opravné zápočtové previerky (1.ZP a 2.ZP): oprava 1.ZP 3.6.2026
oprava 2. ZP 10.6.2026

Prihlasovanie v Moodli na obe od 26.5. -28.5.2026

Kurz zo stredoškolskej matematiky

- Termín konania: 25.05.2026 – 26.06.2026
- Rozsah: 15 vyučovacích hodín
- Cena kurzu: 60,- €

V prípade záujmu o ponúkaný kurz pošlite svoju prihlášku spolu s potvrdením o zaplatení do 30.04.2026 na email: zuzana.gibova@tuke.sk
Do prihlášky (emailu) uveďte svoje meno a priezvisko.

Predĺžené prihlasovanie do 10.5.2026

- Sumu 60,- € je potrebné uhradiť na č.ú.: SK82 8180 0000 0070 0015 1433
- Názov príjemcu: Fakulta elektrotechniky a informatiky
- Variabilný symbol: 1040
- Konštantný symbol: 0308
- Do správy pre prijímateľa uveďte: Meno Priezvisko

Kurz bude prebiehať v učebniach FEI TUKE v trojhodinových blokoch jedenkrát týždenne počas piatich týždňov.

Dú: str. 88 /9 - 11, 20, 23, 26, 31, 39, 42, 46, 48