

Matematika 2 – 12.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Zopakujte si:

1. Viazaný lokálny extrém je lokálny extrém funkcie $z = f(x, y)$ na množine L .
2. Ak sa dá vyjadriť z väzby jednoznačne niektorá premenná, potom hľadáme viazaný extrém ako lokálny extrém funkcie jednej premennej.
3. Zápis $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ predstavuje Lagrangeovu funkciu.
4. Ak bod A je stacionárny bod funkcie $z = f(x, y)$, a navyše je $\Delta_2(A) > 0$, potom funkcia $z = f(x, y)$
 - a) nemá lokálny extrém v bode A
 - b) má sedlový bod v bode A
 - c) má lokálny extrém v bode A
 - d) nevieme rozhodnúť o extréme
5. Nech je daná funkcia $z = f(x, y)$ definovaná na M a nech L je množina všetkých bodov z M , pre ktoré platí $g(x, y) = 0$. Potom väzbou nazývame
 - a) funkciu $z = f(x, y) = 0$
 - b) množinu M
 - c) funkciu $g(x, y) = 0$
 - d) množinu L .
6. Ak pre funkciu $z = f(x, y)$ platí, že má lokálny extrém v bode B , potom v tomto bode má lokálne maximum, ak súčasne platí $\Delta_1(A) < 0$.

DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

Viazané extrémym funkcie dvoch premenných

Nech je daná funkcia $z = f(x, y)$ definovaná na M a nech L je množina všetkých bodov z M , pre ktoré platí $g(x, y) = 0$.

Viazaný lokálny extrém - lokálny extrém funkcie $z = f(x, y)$ na množine L

Funkciu $g(x, y) = 0$ – nazývame **väzba**

Určenie viazaných extrémov:

1. Ak sa dá vyjadriť z väzby jednoznačne niektorá premenná - dosadíme ju do funkcie, dostaneme funkciu jednej premennej, viazaný extrém hľadáme ako lokálny extrém funkcie jednej premennej

z''_x alebo $z''_y > 0 \rightarrow$ **viazané lokálne minimum**

z''_x alebo $z''_y < 0 \rightarrow$ **viazané lokálne maximum**

2. Ak sa z väzby nedá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná zostrojíme Lagrangeovu funkciu

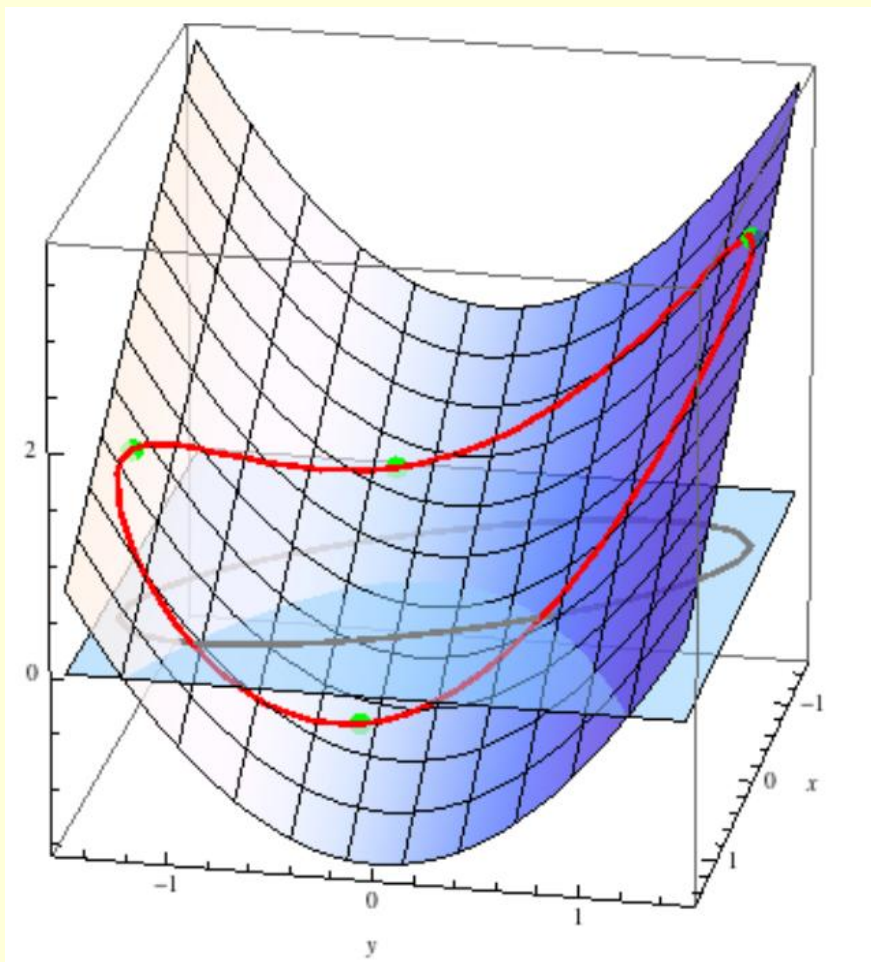
$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Stacionárny bod sa určí zo sústavy

$$\begin{aligned}L'_x &= 0 \\L'_y &= 0 \\g(x, y) &= 0\end{aligned}$$

viazaný extrém sa určí ako pri lokálnych extrémoch

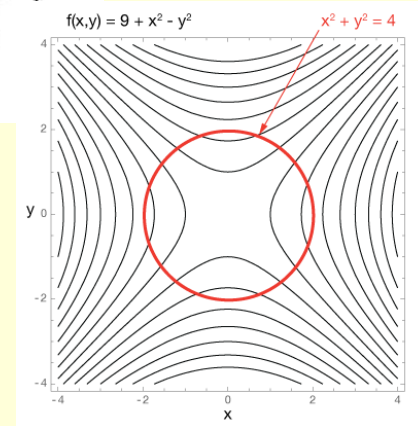
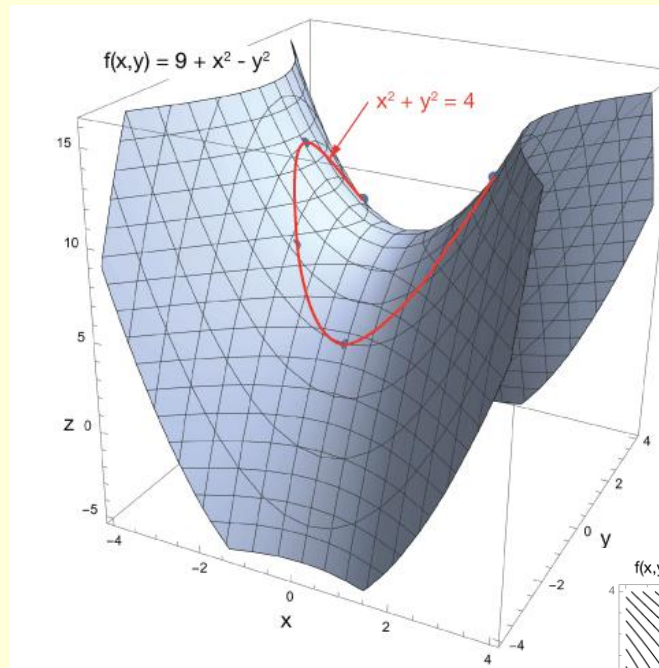
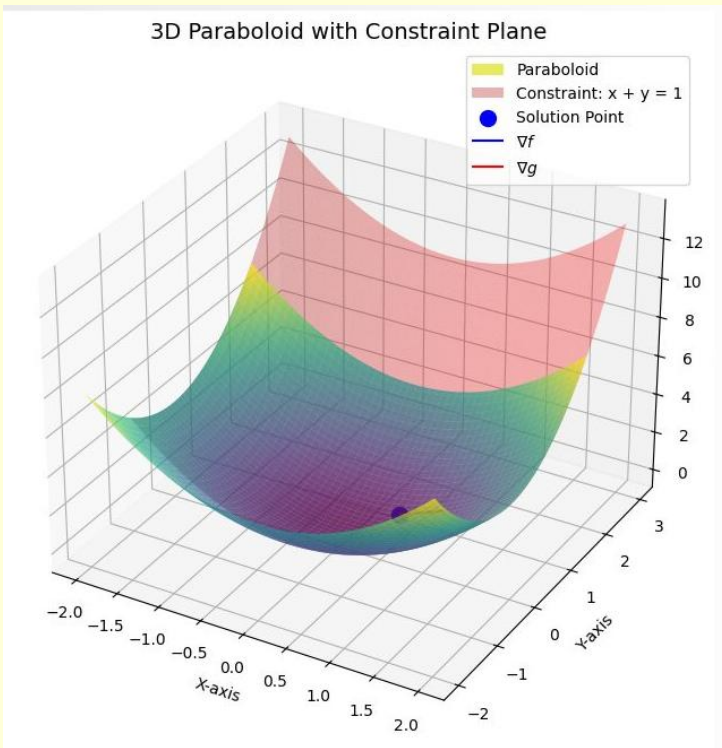
Viazané extrémy sú lokálne maximá alebo minimá funkcie viac premenných, ktoré nehľadáme na celom definičnom obore, ale len na podmnožine určenej jednou alebo viacerými podmienkami (väzbami).



Graficky si viazané extrémy môžeme predstaviť ako hľadanie najvyššieho alebo najnižšieho bodu na ploche, ak sa môžeme pohybovať len po vopred určenej cestičke (väzbe).

3D pohľad: Predstavte si plochu $z = f(x, y)$ (napr. dolina). Väzba $g(x, y) = 0$ je "stena" alebo valec prechádzajúci cez túto dolinu. Viazaný extrém je najvyšší alebo najnižší bod na priesečnici tejto steny a doliny.

Vrstevnice (2D pohľad): Na mape s vrstevnicami funkcie f hľadáme bod, kde sa čiara väzby g práve dotýka (je dotyčnicou) niektorej z vrstevníc.



Pr. 1 – 93 / 7: nájdite viazané extrémny funkcie. $z = x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8$, ak $x + y = 0$

1. Vyjadríme z väzby niektorú premennú, dosadíme ju do funkcie, dostaneme funkciu jednej premennej
2. Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x alebo y) a dáme deriváciu rovnú nule, druhú súradnicu stacionárneho bodu určíme z väzby
3. Vypočítame parciálnu deriváciu druhého rádu
4. Určíme $\Delta_1(\mathbf{A}) = z''_{xx}$ alebo z''_{yy} a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrémny

Pr. 2 – 93 / 15: nájdite viazané extrémum funkcie. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$, ak $x + 2y = 8$

Pr. 3 – 93 / 10: nájdite viazané extrémny funkcie. $z = 46 - x^2 - 4y^2 + 2xy$, ak $x - 2y = 0$

$$z = 46 - x^2 - 4y^2 + 2xy \quad x - 2y = 0$$
$$x = 2y$$

$$z = 46 - (2y)^2 - 4y^2 + 2 \cdot 2y \cdot y$$

$$z = 46 - 4y^2 - 4y^2 + 4y^2$$

$$z = 46 - 4y^2$$

$$z'_y = -8y \quad z'_y = -8y = 0$$

$$y = 0$$

$$x = 2y = 2 \cdot 0 = 0$$

stacionárny bod: $A = (0,0)$

$z''_{yy} = -8 < 0 \rightarrow$ v bode A viazané lokálne maximum

Pr. 4 – 93 / 13: nájdite viazané extrémum funkcie. $z = x^3 + y^3 + 3xy + 2$, ak $y - x = 0$

Pr. 5 – 93 / 12: nájdite viazané extrémny funkcie. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, ak $2y - x = 0$

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1 \quad 2y - x = 0$$
$$x = 2y$$

$$z = (2y)^3 + 8y^3 - 6 \cdot 2y \cdot y + 1$$

$$z = 8y^3 + 8y^3 - 12y^2 + 1$$

$$z = 16y^3 - 12y^2 + 1$$

$$z'_y = 48y^2 - 24y \quad z'_y = 48y^2 - 24y = 0$$

$$24y(2y - 1) = 0$$

$$24y = 0 \vee (2y - 1) = 0$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 2 \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

stacionárne body: $A = (0,0)$, $B = (1,2)$

$z''_{yy}(A) = 96y - 24 = 0 - 24 < 0 \rightarrow$ v bode A *viazané lokálne maximum*

$z''_{yy}(B) = 96y - 24 = 96 \cdot \frac{1}{2} - 24 > 0 \rightarrow$ v bode B *viazané lokálne minimum*

Pr. 6 – 93 / 22: nájdite viazané extrémny funkcie. $z = 8 - 2x - 4y$, ak $x^2 + 2y^2 = 12$

1. Z väzby sa nedá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. Derivujeme Lagrangeovu funkciu podľa x a y

3. Určíme stacionárne body zo sústavy

$$\begin{aligned} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

4. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu Lagrangeovej funkcie a ich hodnoty pre stacionárne body

5. Určíme $\Delta_2(A)$ a $\Delta_1(A)$ pre všetky stacionárne body a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrémny

Pr. 7 – 94 / 28: nájdite viazané extrémny funkcie. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ak $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$

Pr. 8 – 94 / 24: nájdite viazané extrémny funkcie. $z = x - 2y + 3$, ak $x^2 + y^2 = 5$

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$L(x, y) = x - 2y + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

$$L'_x = 1 + \lambda 2x$$

$$L'_x = 1 + \lambda 2x = 0$$

$$L'_y = -2 + \lambda 2y = 0$$

$$L'_y = -2 + \lambda 2y$$

$$2\lambda x = -1$$

$$2\lambda x = 2$$

$$x = \frac{-1}{2\lambda}$$

$$y = \frac{1}{\lambda}$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$\left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 5$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5$$

$$\frac{1 + 4}{4\lambda^2} = 5$$

$$\frac{5}{4\lambda^2} = 5$$

$$\frac{1}{4} = \lambda^2 \rightarrow \frac{1}{2} = \lambda, -\frac{1}{2} = \lambda$$

$$\text{A: } \frac{1}{2} = \lambda: \quad x = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1 \quad y = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$\text{B: } -\frac{1}{2} = \lambda: \quad x = \frac{-1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 \quad y = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

	A: $\frac{1}{2} = \lambda$	B: $-\frac{1}{2} = \lambda$
$L''_{xx} = \lambda 2$	1	-1
$L''_{xy} = 0$	0	0
$L''_{yx} = 0$	0	0
$L''_{yy} = \lambda 2$	1	-1

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_1(A) = L''_{xx}(A) = 1 > 0$$

v bode A funkcia má *viazané lokálne minimum*

$$\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_1(B) = L''_{xx}(B) = -1 < 0$$

v bode B funkcia má *viazané lokálne maximum*

Pr. 9 – 94 / 25: nájdite viazané extrémny funkcie.

$$z = y - x + 3, \text{ ak } x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

Dú: str. 94 / 8, 14, 21, 22, 23, 27, 29

Informácie k 2.ZP

20.5.2026 7:30-9:00: miestnosť P25: št.sk. D4,D9 (cvičenie utorok 10:50, Varga)

čas: 80 minút

skladá sa z dvoch častí: teoretická (test **15** bodov)
praktická (príklady **40** bodov - 7 príkladov)

Okruhy: neurčitý integrál – goniometrické funkcie, racionálna, iracionálna
určitý integrál – substitúcia, per partes
obsah časti roviny
objem rotačného telesa
parciálne derivácie prvého rádu danej funkcie
lokálne extrémny danej funkcie
viazané extrémny danej funkcie

Opravné zápočtové previerky (1.ZP a 2.ZP): oprava 1.ZP 3.6.2026
oprava 2. ZP 10.6.2026

Prihlasovanie v Moodli na obe od 26.5. - 28.5.2026