NMPaMŠ – 11.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej

Exponenciálne rozdelenie

Dané $\lambda \in R^+$ (v príkladoch zadané ako stredná, priemerná hodnota).

Hustota pravdepodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & pre\ x \geq 0, \\ 0 & pre\ x < 0, \end{cases}$$

Distribučná funkcia

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0 \end{cases}$$

označenie $X \sim exp(\lambda)$.

Stredná hodnota **Disperzia (rozptyl)** **Smerodajná odchýlka**

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda^2 \quad a \quad \sigma(X) = \lambda.$$

Rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej

Normálne rozdelenie

Dané $\mu \in R$, $\sigma \in R^+$ (v príkladoch zadané ako stredná hodnota, smerodajná odchýlka).

označenie $X \sim norm(\mu, \sigma)$

Distribučná funkcia – F(x)

Normovanie náhodnej premennej X pre normálne rozdelenie, po normovaní nová náhodná premenná Y

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}, \qquad Y \sim norm(0,1)$$

Distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia – Φ (Y)

Vlastnosti Φ (Y)

$\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ pre každé $y \in R$.

$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) =$

$F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Pr. 1 – 2 - a:

(a) Priemerná doba životnosti súčiastky je 600 hodín. Doba životnosti má exponenciálne rozdelenie. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraná súčiastka bude fungovať

i. menej ako 800 hodín,

ii. viac ako 500 hodín,

iii. viac ako 600, ale menej ako 700 hodín.

iv. Určte takú hodnotu t, že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako t hodín, je 0,9.

iii. X – doba životnosti súčiastky

$$F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{\lambda}} \qquad X \sim exp(600)$$

$$P(600 < X < 700) = F(700) - F(600)$$

$$P(600 < X < 700) = \left(1 - e^{\frac{-700}{600}}\right) - \left(1 - e^{\frac{-600}{600}}\right)$$

$$P(600 < X < 700) = 0{,}0565$$

Pr. 2:

Čas reakcie má normálne rozdelenie s priemerom 0,25 s a smerodajnou odchýlkou 0,05 s.

i. Aká je pravdepodobnosť, že reakcia je rýchlejšia ako 0,2 s?

ii. Aká je pravdepodobnosť, že čas reakcie je medzi 0,2 s a 0,3 s?

iii. Určte čas reakcie, ktorý bude presiahnutý s pravdepodobnosťou 0,1.

i.

X – čas reakcie

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad X \sim norm(0{,}25; 0{,}05)$$

$$P(X < 0{,}2) = F(0{,}2) = \Phi\left(\frac{0{,}2-0{,}25}{0{,}05}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$$

hodnota z tabuľky

ii.

$$P(0{,}2 < X < 0{,}3) = F(0{,}3) - F(0{,}2) = \Phi\left(\frac{0{,}3-0{,}25}{0{,}05}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}2-0{,}25}{0{,}05}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 2.\ 0{,}84134 - 1 = 0{,}68268$$

hodnota z tabuľky

Dú: súbor príkladov na spojitú premennú, časť 2, 3

Matematická štatistika

Triedenie dát:

- **Prosté triedenie** – usporiadanie podľa veľkosti $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, kde x_i sú namerané hodnoty.
- **Triedenie podľa početnosti** – pre každú nameranú hodnotu x_j je n_j počet výskytov hodnoty x_j medzi nameranými hodnotami, napr.

x_j	167	170	174	175	178	180
n_j	1	3	5	6	3	2

,

Výberový priemer náhodného výberu V_n *je číslo*

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ *pre prosté triedenie,*

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j$ *pre triedenie podľa početnosti.* $\left(n = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j\right)$

Modifikovaný výberový rozptyl (disperzia) náhodného výberu V_n *je číslo*

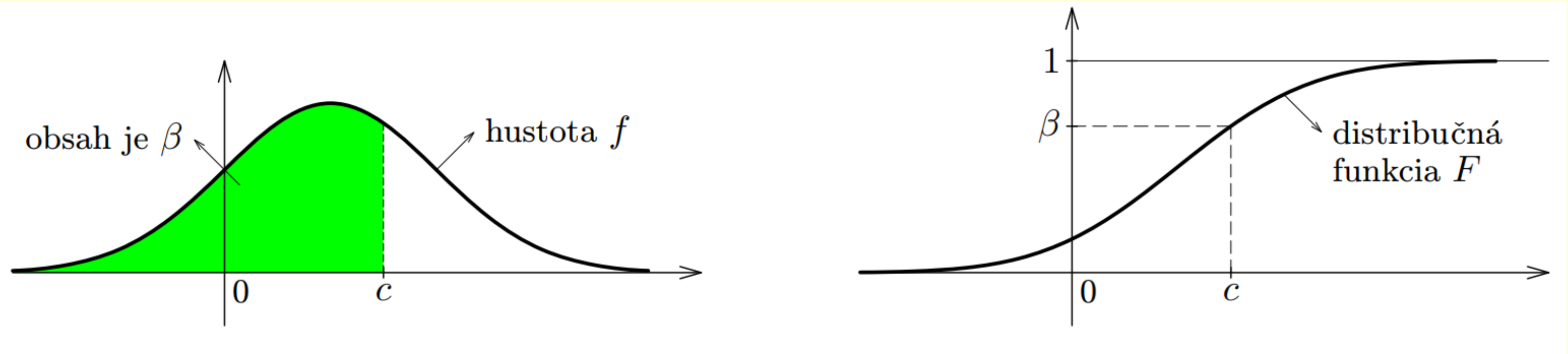
$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ *pre prosté triedenie,*

$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k}(x_j - \overline{x})^2\, n_j$ *pre triedenie podľa početnosti.*

Modifikovaná výberová odchýlka náhodného výberu V_n *je číslo* $s^* = \sqrt{s^{*2}}$

β - kvantil - číslo, ktorého hodnota distribučnej funkcie F(c) je rovná pravdepodobnosti, pre ktorú je kvantil definovaný

Najmenšie reálne číslo c, že $F(c) \geq \beta$ nazývame β-kvantilom rozdelenia pravdepodobnosti F a označujeme ho $c = F^{-1}(\beta)$.



$y_{0,9} = 1{,}28155$- hodnota zo súboru dát bude menšia ako 1,28155 s pravdepod. 90%

RP – rozdelenie pravdepodobnosti

DF – distribučná funkcia

NP - náhodná premenná

β – kvantil = hodnota z tabuľky

Názov RP	NP	DF	β-kvantil
Normovaná normálna	Y	Φ	$\Phi^{-1}(\beta) = y_\beta$
Chí-kvadrát	χ^2	χ^2_n	$\chi^2_{\beta,n}$
Studentovo t	T	t_n	$t_{\beta,n}$
Fisherovo	F	$F_{n,m}$	$F_{\beta;n,m}$

Intervaly spoľahlivosti

Hlavná myšlienka intervalového odhadu parametra Q základného súboru spočíva v nájdení istého intervalu I, v ktorom leží s nami zvolenou pravdepodobnosťou p skutočná hodnota parametra Q. Potom platí, že do I na $100 \cdot p$ percent patrí skutočná hodnota Q.

Hladina významnosti α - pravdepodobnosť, že náš štatistický záver je chybný, $\alpha \in (0,1)$

Intervalový odhad Q na hladine významnosti α - číselný interval $\langle Q_1, Q_2 \rangle$, v ktorom leží Q s pravdepodobnosťou 1 - α

1 - α - koeficient spoľahlivosti intervalového odhadu $\langle Q_1, Q_2 \rangle$

a) Intervaly spoľahlivosti pre μ (σ - známe)

Obojstranný interval

s^*

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{x} + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

výberový priemer

Ľavostranný interval **Pravostranný interval**

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \infty \right), \quad \textit{resp.} \quad \mu \in \left(-\infty \,,\, \bar{x} + y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

počet prvkov

β – kvantil pre normálne rozdelenie - hodnota z tabuľky

b) Intervaly spoľahlivosti pre μ (σ - neznáme)

Obojstranný interval

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

Ľavostranný interval **Pravostranný interval**

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - t_{1-\alpha,\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \,,\, \infty \right), \quad resp.\ \mu \in \left(-\infty \,,\, \overline{x} + t_{1-\alpha,\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

β – kvantil pre Studentovo rozdelenie - hodnota z tabuľky

c) Intervaly spoľahlivosti pre σ^2 (μ - neznáme)

Obojstranný interval

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}}, \quad \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}} \right\rangle$$

Ľavostranný interval **Pravostranný interval**

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}}, \quad \infty \right) \quad \textit{resp.} \quad \sigma^2 \in \left(0, \quad \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\alpha,\, n-1}} \right\rangle$$

β – kvantil pre χ^2 rozdelenie - hodnota z tabuľky

Pr. 3:

(a) Kontrolór nameral nasledujúce hodnoty objemu fliaš Coca-Coly:

$$0{,}49;\ 0{,}5;\ 0{,}48;\ 0{,}47;\ 0{,}505;\ 0{,}485;\ 0{,}49;\ 0{,}495;\ 0{,}5;\ 0{,}48.$$

i. Určte 95%- ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu a disperziu.

ii. Nájdite 99% -ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.

iii. Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 0{,}5$ oproti hypotéze $H_1 : \mu < 0{,}5$.

rozdelenie podľa početnosti

i

$n = 10$

x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
0,47	1	$3{,}8025 \cdot 10^{-4}$	$3{,}8025 \cdot 10^{-4}$
0,48	2	$0{,}9025 \cdot 10^{-4}$	$1{,}805 \cdot 10^{-4}$
0,485	1	$0{,}2025 \cdot 10^{-4}$	$0{,}2025 \cdot 10^{-4}$
0,49	2	$0{,}0025 \cdot 10^{-4}$	$0{,}005 \cdot 10^{-4}$
0,495	1	$0{,}3025 \cdot 10^{-4}$	$0{,}3025 \cdot 10^{-4}$
0,5	2	$1{,}1025 \cdot 10^{-4}$	$2{,}205 \cdot 10^{-4}$
0,505	1	$2{,}4025 \cdot 10^{-4}$	$2{,}4025 \cdot 10^{-4}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} x_i n_i = 0{,}4895$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

$$= 0{,}00011916$$

$$\sigma = s^* = \sqrt{s^{*2}} = 0{,}0109161$$

Pr. 3:

určujeme μ, kde σ^2 je neznáme

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

$$\mu \in \left\langle 0,4895 - 2,2622 \cdot \frac{0,01092}{\sqrt{10}},\ 0,4895 + 2,2622 \cdot \frac{0,01092}{\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$\mu \in \langle 0,48168,\ 0,497311 \rangle$$

$1 - \alpha = 0,95$

$\alpha = 0,05$

$t_{1-\frac{0,05}{2}, 10-1} = t_{0,975, 9} = 2,2622 \rightarrow$ z tabuľky, s-kvantil studentovo-t rozdel.

Pr. 3:

určujeme σ^2, kde μ je neznáme

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\,s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}} \; \sigma^2 , \; \frac{(n-1)\,s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}} \; \sigma^2 \right\rangle$$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$ $\qquad \sigma^2 \in \langle 0,00005637,\ 0,000397144 \rangle$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1} = \chi^2_{0,975,\,9} = 19,023$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1} = \chi^2_{0,025;\,9} = 2,7004$$

z tabuľky α-kvantil χ^2 rozdelenie