NMPaMŠ – 12.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Intervaly spoľahlivosti

Hlavná myšlienka intervalového odhadu parametra Q základného súboru spočíva v nájdení istého intervalu I, v ktorom leží s nami zvolenou pravdepodobnosťou p skutočná hodnota parametra Q. Potom platí, že do I na $100 \cdot p$ percent patrí skutočná hodnota Q.

Hladina významnosti α - pravdepodobnosť, že náš štatistický záver je chybný, $\alpha \in (0,1)$

Intervalový odhad *Q* na hladine významnosti α - číselný interval $\langle Q_1, Q_2 \rangle$, v ktorom leží *Q* s pravdepodobnosťou 1 - α

1 - α - koeficient spoľahlivosti intervalového odhadu $\langle Q_1, Q_2 \rangle$

a) Intervaly spoľahlivosti pre μ (σ - známe)

Obojstranný interval

s^*

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - \underbrace{y_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \overline{x} + \underbrace{y_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

výberový priemer

Ľavostranný interval **Pravostranný interval**

$$\mu \in \left\langle \underbrace{\overline{x} - y_{1-\alpha}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \infty \right), \quad resp. \quad \mu \in \left(-\infty , \underbrace{\overline{x} + y_{1-\alpha}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

počet prvkov

β – kvantil pre normálne rozdelenie - hodnota z tabuľky

b) Intervaly spoľahlivosti pre μ (σ - neznáme)

Obojstranný interval

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

Ľavostranný interval **Pravostranný interval**

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - t_{1-\alpha,\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \,,\, \infty \right), \quad resp.\ \mu \in \left(-\infty \,,\, \overline{x} + t_{1-\alpha,\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

β – kvantil pre Studentovo rozdelenie - hodnota z tabuľky

c) Intervaly spoľahlivosti pre σ^2 (μ - neznáme)

Obojstranný interval

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}}, \quad \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}} \right\rangle$$

Ľavostranný interval **Pravostranný interval**

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}}, \quad \infty \right) \quad \textit{resp.} \quad \sigma^2 \in \left(0, \quad \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\alpha,\, n-1}} \right\rangle$$

β – kvantil pre χ^2 rozdelenie - hodnota z tabuľky

Základné pojmy testovania štatistických hypotéz

Nulová hypotéza H_0 (parameter Q_0) – hypotéza, ktorej platnosť overujeme

Alternatívna hypotéza H (parameter Q) – hypotéza, ktorú prijímame, keď neplatí nulová hypotéza

Môže byť **a) pravostranná H:** $Q > Q_0$
b) ľavostranná H: $Q < Q_0$
c) obojstanná H: $Q \neq Q_0$

Testovacia charakteristika G – funkcia, ktorá závisí od náhodného výberu

Kritická oblasť K_α (oblasť zamietnutia na hladine významnosti α) - interval, určený kvantilom testovacej charakteristiky G, keď hodnota $G \in K_\alpha$ **zamietame hypotézu H_0**

Hladina významnosti α - pravdepodobnosť, že náš štatistický záver je chybný, $\alpha \in (0,1)$

Testy

1. Y – test zhody strednej hodnoty so známou μ_0 (σ poznáme)

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0: \ \mu = \mu_0$.

Testovacia charakteristika: $Y = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$.

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu

a) $\mathcal{H}_1: \ \mu > \mu_0$ je $K_\alpha = (y_{1-\alpha}\,; \infty)$

b) $\mathcal{H}_1: \ \mu < \mu_0$ je $K_\alpha = (-\infty\,; -y_{1-\alpha})$

c) $\mathcal{H}_1: \ \mu \neq \mu_0$ je $K_\alpha = (-\infty\,; -y_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (y_{1-\frac{\alpha}{2}}\,; \infty)$

kde y_β je β- kvantil normovaného normálneho rozdelenia pravdepodobnosti.

2. t - test zhody strednej hodnoty so známou μ_0 (σ nepoznáme)

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0: \ \mu = \mu_0$.
Testovacia charakteristika:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^*} \cdot \sqrt{n}\,.$$

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu
a) $\mathcal{H}_1: \ \mu > \mu_0$ je $K_\alpha = (t_{1-\alpha,\, n-1}\,;\,\infty)$
b) $\mathcal{H}_1: \ \mu < \mu_0$ je $K_\alpha = (-\infty\,;\,-t_{1-\alpha,\, n-1})$
c) $\mathcal{H}_1: \ \mu \neq \mu_0$ je $K_\alpha = (-\infty\,;\,-t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}\,;\,\infty)$
kde $t_{\beta,\, n-1}$ je β kvantil Studentovho t-rozdelenia pravdepodobnosti s $n-1$ stupňami voľnosti.

3. χ^2 - test zhody rozptylu σ^2 so známou σ_0^2

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2$.
Testovacia charakteristika:

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s^{*2}.$$

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu
a) $\mathcal{H}_1: \ \sigma^2 > \sigma_0^2$ je $K_\alpha = (\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}\,;\, \infty)$
b) $\mathcal{H}_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2$ je $K_\alpha = (0;\, \chi^2_{\alpha,\, n-1}),$
c) $\mathcal{H}_1: \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ je $K_\alpha = (0;\, \chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}) \cup (\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}\,;\, \infty)$
kde $\chi^2_{\beta,\, n-1}$ je β kvantil χ^2 rozdelenia pravdepodobnosti

Pr. 1 - 4a:

Kontrolór nameral nasledujúce hodnoty objemu fliaš Coca-Coly:

$$0{,}49;\ 0{,}5;\ 0{,}48;\ 0{,}47;\ 0{,}505;\ 0{,}485;\ 0{,}49;\ 0{,}495;\ 0{,}5;\ 0{,}48.$$

i. Určte 95%- ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu a disperziu.

ii. Nájdite 99% -ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.

iii. Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 0{,}5$ oproti hypotéze $H_1 : \mu < 0{,}5$.

i: $1 - \alpha = 0{,}95$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{7} n_j x_j = \frac{1}{10} 4{,}895 = 0{,}4895$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{7} n_j (x_j - \bar{x})^2$$

$$s^{*2} \frac{1}{9} 0{,}0010725 = 0{,}0001192$$

$$\sigma = \sqrt{s^{*2}} = 0{,}01092$$

rozdelenie podľa početnosti

x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
0,47	1	$3{,}8025 \cdot 10^{-4}$	$3{,}8025 \cdot 10^{-4}$
0,48	2	$0{,}9025 \cdot 10^{-4}$	$1{,}805 \cdot 10^{-4}$
0,485	1	$0{,}2025 \cdot 10^{-4}$	$0{,}2025 \cdot 10^{-4}$
0,49	2	$0{,}0025 \cdot 10^{-4}$	$0{,}005 \cdot 10^{-4}$
0,495	1	$0{,}3025 \cdot 10^{-4}$	$0{,}3025 \cdot 10^{-4}$
0,5	2	$1{,}1025 \cdot 10^{-4}$	$2{,}205 \cdot 10^{-4}$
0,505	1	$2{,}4025 \cdot 10^{-4}$	$2{,}4025 \cdot 10^{-4}$

μ - známe, σ - neznáme

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

$$\mu \in \left\langle 0{,}4895 - 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}01092}{\sqrt{10}},\ 0{,}4895 + 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}01092}{\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$\mu \in \langle 0{,}48168,\ 0{,}49311 \rangle$$

$1 - \alpha = 0{,}95$

$\alpha = 0{,}05$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$$

$t_{1-\frac{0{,}05}{2}, 10-1} = t_{0{,}975, 9} = 2{,}2622 \rightarrow$ β – kvantil pre Studentovo rozdelenie – hodnota z tabuľky

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\,s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}},\ \frac{(n-1)\,s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}} \right\rangle$$

σ^2 σ^2

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$ $\qquad \sigma^2 \in \langle 0{,}00005637,\ 0{,}000397144 \rangle$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1} = \chi^2_{0{,}975,\,9} = 19{,}023$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1} = \chi^2_{0{,}025,\,9} = 2{,}7004$$

z tabelki α-kwantyl
χ^2 rozkładu

iii $\alpha = 0{,}05$ (hladina významnosti)

$H_0: \mu_0 = 0{,}5$ $H_1: \mu < 0{,}5 = \mu_0$

$\Downarrow$

μ - známe, σ - neznáme $\Rightarrow$ t test

$\boxed{\mu < \mu_0}$

ľavostranná hyp.

$\Downarrow$

$K_\alpha \in (-\infty; t_{1-\alpha, n-1})$

testovacia charakteris.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s^*} \sqrt{n}$$

$$t = \frac{0{,}4895 - 0{,}5}{0{,}010916} \cdot \sqrt{10}$$

$$t = -3{,}0418$$

$t_{1-\alpha, n-1} = t_{0{,}95, 9} = 1{,}8331$ (s-kvantil - t-test)

$K_\alpha \in (-\infty; -1{,}8331)$ $t \in K_\alpha$, zamietneme H_0

$\Downarrow$

prijímame $\mu < 0{,}5$

Pr. 2: - 4k

Študenti písali zápočtovú s maximálnym ziskom 15 bodov. Náhodným výberom boli zistené nasledujúce výsledky (počty získaných bodov):

x_i	0	2	3	5	6	8	10	12	14	15
n_i	1	2	1	4	5	5	3	2	1	1

Predpokladáme normálne rozdelenie počtu bodov so známym $\sigma^2 = 14$. Určte:

i. 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
ii. 99 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
iii. 95 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
iv. na hladine významnosti 0,1 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 6,2$ oproti hypotéze $H_1 : \mu > 6,2$;
v. na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 7,8$ oproti hypotéze $H_1 : \mu \neq 7,8$

iv $\quad \alpha = 0,1 \qquad H_0 : \mu_0 = 6,2, \quad H_1 : \mu > 6,2 = \mu_0$ pravostranná hypotéza

μ - známe, σ^2 - známe $\Rightarrow$ 1. test

testovacia charakteristika:

$$y = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{7,2 - 6,2}{\sqrt{14}}\sqrt{25} = 1,336306$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{25} x_i n_i = \frac{1}{25}\, 180 = 7,2$$

$y_{0,9} = 1,28155$

$K_\alpha \in (y_{1-\alpha}, \infty) = (1,28155, \infty) \qquad y \in K_\alpha \Rightarrow H_0$ zamietame

Pr. 3 – 4i:

Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl $\sigma^2 = 0{,}06$ bol urobený náhodný výber s nameranými hodnotami:

$$1,3;\ 1,8;\ 1,4;\ 1,2;\ 0,9;\ 1,5;\ 1,7.$$

Určte:

i. 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;

ii. 90 %-ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;

iii. 99 %-pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

iii. $1-\alpha = 0{,}99$

$n = 7 \quad \sigma^2 = 0{,}06$

$$\mu \in \left(-\infty, \bar{x} + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\rangle$$

i	x_i
1	0,9
2	1,2
3	1,3
4	1,4
5	1,5
6	1,7
7	1,8

$$u_{1-\alpha} = u_{0,99} = 2{,}32625$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} x_i = 1{,}4$$

$$\mu \in \left(-\infty; 1{,}4 + 2{,}32625 \cdot \frac{\sqrt{0{,}06}}{\sqrt{7}}\right\rangle$$

$$\mu \in (-\infty; 1{,}6154\rangle$$

Trasa na určitej linke MHD bola prejdená rýchlosťami (v km/hod):

8,5; 9,5; 7,8; 8,2; 9,0; 7,5; 8,2; 7,8; 9,0; 8,5.

i. Otestujte na hladine významnosti 0,01 hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 0{,}35$ oproti hypotéze $H_1 : \sigma^2 > 0{,}35$.

ii. Určte 95%- ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

$\alpha = 0{,}01$

H_0: $\sigma_0^2 = 0{,}35$

H_1: $\sigma^2 > 0{,}35$ pravostranná

Testovacia charakteristika: $\chi^2 = \frac{(n-1).s^{*2}}{\sigma_0^2}$

j	x_j	n_j	$x_j - \bar{x}$	$n_j(x_j - \bar{x})^2$
1	7,5	1	-0,9	0,81
2	7,8	2	0,6	0,72
3	8,2	2	0,2	0,08
4	8,5	2	0,1	0,02
5	9	2	0,6	0,72
6	9,5	1	1,1	1,21

3,56

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{6} n_j x_j = \frac{1}{10} 84 = 8{,}4$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{6} n_j (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} 3{,}56 = 0{,}3955$$

$$\chi^2 = \frac{(10-1).\,0{,}3955}{0{,}35} = 10{,}17143$$

Kritická oblasť: $K_\alpha = (\chi^2_{1-\alpha,n-1}, \infty)$

n = 10, n - 1 = 9

$1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

$$\chi^2_{1-\alpha,n-1} = \chi^2_{0{,}99,9} = 21{,}666$$

β – kvantil pre χ^2 rozdelenie – hodnota z tabuľky

$$10{,}17143 \notin (21{,}666, \infty)$$

$$\chi^2 \notin K_\alpha \rightarrow prijímame\ H_0$$

Pr. 5 - 4e:

Hráč bowlingu nahral nasledujúce počty bodov:

$$7,\ 9,\ 8,\ 4,\ 6,\ 5,\ 0\ ,3,\ 10,\ 7.$$

i. Nájdite 95%- ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.

ii. Na hladine významnosti 0,1 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 6$ proti $H_1 : \mu < 6$.

$\alpha = 0{,}1$

$H_0\colon \mu_0 = 6$

$H_1\colon \mu_0 < 6$ ľavostranná

Testovacia charakteristika: $t = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s^*}\sqrt{n}$

$$t = \frac{5{,}9-6}{8{,}989}\sqrt{10} = -0{,}10547$$

j	x_j	n_j	$x_j - \bar{x}$	$n_j(x_j-\bar{x})^2$
1	0	1	34,81	34,81
2	3	1	8,41	8,41
3	4	1	3,61	3,61
4	5	1	0,81	0,81
5	6	1	0,01	0,01
6	7	2	1,21	2,42
7	8	1	4,41	4,41
8	9	1	9,61	9,61
9	10	1	16,81	16,81

80,9

Kritická oblasť: $K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha,n-1})$

n = 10, n - 1 = 9

$1-\alpha = 1-0{,}1 = 0{,}9$

$t_{1-\alpha,n-1} = t_{0{,}9{,}9} = 1{,}383$

β – kvantil pre Studentovo rozdelenie – hodnota z tabuľky

$$-0{,}10547 \notin (-\infty, -1{,}383)$$

$$t \notin K_\alpha \rightarrow prijímame\ H_0$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{9} n_j x_j = \frac{1}{10}59 = 5{,}9$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{9} n_j(x_j-\bar{x})^2 = \frac{1}{9}80{,}9 = 8{,}989$$

Dú: všetky príklady na štatistiku o súboru 4