NMPaMŠ – 10.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

2.Spojitá náhodná premenná

Spojitá náhodná veličina X - nadobúda všetky hodnoty z intervalu $x \in (-\infty, \infty)$
Pravdepodobnosť vyjadrená pomocou **hustoty pravdepodobnosti *f* (x)**

Distribučná funkcia *F*(*x*)

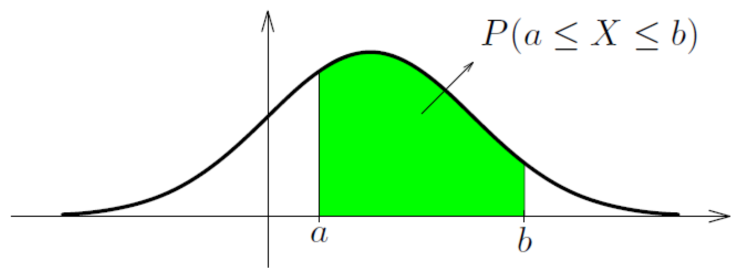
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t, x \in (-\infty, \infty)$$

Vlastnosti:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

2. distribučná funkcia $F(x)$ je spojitá na celej množine reálnych čísel

3. $$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) =$$
$$= P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$



Graf hustoty pravdepodobnosti $f(x)$

Hustota pravdepodobnosti *f* (*x*)

Vlastnosti:

$$ak\ existuje\ derivácia\ F'(x),\ tak\ F'(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R};$$

$$tzv.\text{„}normalizačná\ podmienka\text{“}:\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Stredná hodnota náhodnej premennej E(X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,dx$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Analógia medzi rozdeleniami náhodnej premennej

Diskrétne rozdelenie – X nadobúda konkrétne hodnoty z H(x)
Spojité rozdelenie – X nadobúda všetky hodnoty z intervalu (ohraničeného alebo neohraničeného)

veličina	Diskrétne rozdelenie	Spojité rozdelenie
distribučná funkcia	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{dt}$
pravdepodobnosť / hustota pravdepodobnosti	$P(X = x_i) = p_i$ $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$	$f(x)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
stredná hodnota	$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$
disperzia	$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i$	$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,dx$
smerodajná odchýlka	$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Pr. 1 – 1 - a:

Nech $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le -1, \\ k \cdot (x+1) & \text{for } -1 < x < 2, \\ 0 & \text{for } x \ge 2. \end{cases}$

i. Vypočítajte konštantu k tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X

ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.

iii. Vypočítajte $P(-1 \le X < 1)$.

iv. Nájdite predpis distribučnej funkcie.

i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{2} k(x+1)\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = 0 + \left[k\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right]_{-1}^{2} + 0$$

$$4k + \frac{k}{2} = 1$$

$$9k = 2$$

$$k = \frac{2}{9}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{2}{9}(x+1) & -1 < x < 2 \\ 0 & x \ge 2 \end{cases}$$

ii

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x)\, dx$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0\, dx + \int_{-1}^{2} \frac{2}{9}(x+1) \cdot x\, dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{2}{9}(x^2 + x)\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2} = \frac{28}{27} - \frac{2}{54} = \frac{54}{54} = 1$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\, dx + \int_{-1}^{2} (x - 1)^2 \frac{2}{9}(x+1)\, dx + \int_{2}^{\infty} 0\, dx =$$

$$= \frac{2}{9} \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 1)(x+1)\, dx = \frac{2}{9} \int_{-1}^{2} (x^3 - x^2 - x + 1)\, dx$$

$$= \frac{2}{9} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}$$

iii

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$P(-1 \le X < 1) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{9}(x+1)\,dx = \left[\frac{2}{9}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{9}$$

iv

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2 & -1 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$x \le -1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

$-1 < x \le 2$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{2}{9}(t+1)\,dt = 0 + \frac{2}{9}\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{x}$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{x^2}{2} + x\right] - \frac{2}{9}\left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1}{9}(x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{9}(x+1)^2$$

$x > 2$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{2} \frac{2}{9}(t+1)\,dt + \int_{2}^{x} 0\,dt = 1$

Pr. 2 – 1 - h:

(f) Daná je funkcia: $F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 1, \\ b \cdot (x^2 - 1), & \text{ak } 1 \leq x \leq 3, \\ c, & \text{ak } x > 3. \end{cases}$

i. Stanovte parametre a, b tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X.

ii. Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X.

iii. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X.

iv. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(0 \leq X < 2)$.

i

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0}} \qquad \lim_{x \to \infty} c = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$$

distribučná funkcia $F(x)$ je spojitá na celej množine reálnych čísel

$x = 1$ $\quad b(1-1) = 0$

$b \cdot 0 = 0$

$x = 3$ $\quad b(9-1) = 1$

$$\underline{\underline{b = \frac{1}{8}}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1) & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Pr. 2 – 1 - h:

ii

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \cdot 2x = \frac{x}{4} & x \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0 & x \notin \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$$

iii.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{1} x.0\, \mathrm{d}x + \int_{1}^{3} x.\frac{x}{4}\, \mathrm{d}x + \int_{3}^{\infty} x.0\, \mathrm{d}x$$

$$E(X) = \int_1^3 \frac{x^2}{4}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^3 = \frac{3^3}{12} - \frac{1^3}{12} = \frac{26}{12}$$

iv.

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$P(0 \leq X < 2) = \int_0^1 0\ \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{x}{4}\ \mathrm{d}x$$

$$P(0 \leq X < 2) = \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^2 = \frac{2^2}{8} - \frac{1^2}{8} = \frac{3}{8}$$

alebo $P(0 \leq X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{1}{8}(2^2 - 1) - 0 = \frac{3}{8}$

Dú: súbor príkladov – 1. číselné charaktetristiky: b - g, i – k