Matematika 1 – 11.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Determinant matice

determinant matice A – číslo, ktoré priradíme štvorcovej matici A typu n, označenie: **det A, resp. |A|**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Subdeterminant (minor) $\mathbf{D_{ij}}$ vzhľadom na prvok $\mathbf{a_{ij}}$ matice A je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním i -tého riadku a j -tého stĺpca matice A

subdeterminanty

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

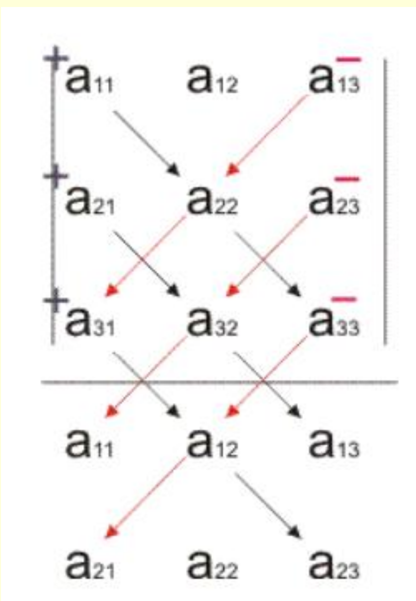
Výpočet determinantu matice

determinant 2. stupňa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

súčin prvkov na hlavnej diagonále mínus súčin prvkov na vedľajšej diagonále

determinant 3. stupňa - **Sarrusovo pravidlo -** pod tretí riadok v matici podpíšeme prvý a druhý riadok a násobíme po uhlopriečkach



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}\right)$$

determinant n - tého stupňa, $n \geq 4$ – počíta sa pomocou rozvoja determinantu podľa riadka alebo stĺpca

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2}^{*} + \ldots + a_{in}A_{in}$$ **rozvoj podľa riadku**

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$ **rozvoj podľa stĺpca**

$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ je **algebrický doplnok**

D_{ij} je **subdeterminant prvku a_{ij}** matice A
(vznikne zakrytím i -tého riadku a j - tého stĺpca matice A)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$a_{32} = 4$

$$* \quad a_{32} \cdot A_{32} = a_{32} \cdot \underbrace{(-1)^{3+2} \cdot D_{32}}$$

Postup pri výpočte determinantu n - tého stupňa, $n \geq 4$:

1. Štvorcovú maticu A nahradíme determinantom $|A|$.

2. Determinant upravíme pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok (stĺpec) **obsahujúci čo najviac núl**.

3. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k **rozvoju determinantu**.

Úpravy v determinante:

- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vzájomnou výmenou dvoch riadkov (stĺpcov), tak $|B| = -|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vynásobením niektorého riadku (stĺpca) matice A nenulovým číslom r, tak $|B| = r|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A pripočítaním reálneho násobku niektorého riadku ((stĺpca) matice A k inému jej riadku, tak $|B| = |A| \rightarrow$ **ekvivalentná úprava**

Pr. 1 – 63 / 5: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Pr. 2 – 63 / 6: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Maticu nahradíme determinantom

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Pri úprave determinantu použijeme Sarrusovo pravidlo - pod tretí riadok v determinante podpíšeme prvý a druhý riadok a násobíme po uhlopriečkach (najprv zľava doprava, potom sprava doľava)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = (1.7.-5) + (2.1.4) + (3.2.3) - (3.7.4) - (1.1.3) - (2.2.-5)$$

$$|A| = (-35) + (8) + (18) - (84) - (3) - (-20) = -9 + (-67) = -76$$

Pr. 3 – 65 / 21: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Pr. 4 – 64 / 19: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pr. 5: Vypočítajte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

1. Štvorcovú maticu *A* nahradíme determinantom $|A|$.
2. Determinant upravíme pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok (stĺpec) **obsahujúci čo najviac núl**.
3. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k **rozvoju determinantu**.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_1 \\ -2R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} = 1(-1)^{1+2}D_{12} = -1\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{matrix}$$

$$= -1.\left[[(1.-1.-4) + (-1.-1.4) + (-2.5.-3)] - [(-2.-1.4) + (1.-1.3) + (-1.5.-4)]\right] =$$

$$= -[(4) + (4) + (30) - ((8) + (3) + (20))] = -(38 - 31) = -7$$

Pr. 6 : Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} = -3(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$-S_1$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= -3.[(2 + 2 + (-2)) - (8 + 1 + (-1))] =$$

$$= -3[2 - (8)] = 18$$

Dú: Str. 64 – 65 / 12-16, 18, 20, 22

Sústavy lineárnych rovníc

Cramerovo pravidlo pre sústavu LR (n = 3)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Riešenie: $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \quad x_3 = \dfrac{D_3}{D}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$ - môžeme použiť CP

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3)^T$

Pr. 1 – 78 / 3: Riešte sústavy LR pomocou Cramerovho pravidla

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

1. Vypočítame determinant D a overíme, že $D \neq 0$.
2. Vypočítame determinanty D_1, D_2, D_3.
3. Určíme hodnotu x_1, x_2, x_3.
4. Zapíšeme výsledok v tvare $(x_1, x_2, x_3)^T$

Pr. 2 – 79/ 8: Riešte sústavy LR pomocou Cramerovho pravidla

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\
-x_1 + 3x_2 - x_3 &= -6 \\
2x_1 - 5x_2 + 5x_3 &= 17
\end{aligned}
$$

Pr. 3 – 78 / 4: Riešte sústavy LR pomocou Cramerovho pravidla

$$\begin{aligned} 3x_1 &+ 4x_2 &+ 2x_3 &= 8 \\ x_1 &+ 5x_2 &+ 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 &+ 3x_2 &+ 4x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad (2, 1, -1)^T$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (60 + 6 + 16) - (20 + 18 + 16) = 82 - 54 = 28 \neq 0$$

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{matrix}$$

môžeme použiť CP

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (160 + 30 + 24) - (30 + 48 + 80) = 214 - 158 = 56$$

$$\begin{matrix} 8 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \end{matrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (60 + 6 + 32) - (20 + 18 + 32) = 98 - 70 = 28$$

$$\begin{matrix} 3 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{matrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \quad (45 + 24 + 40) - (80 + 45 + 12) = 109 - 137 = -28$$

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \end{matrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{56}{28} = 2 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{28}{28} = 1 \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-28}{28} = -1$$

$(2, 1, -1)^T$

Pr. 4 : Riešte sústavy LR pomocou Cramerovho pravidla

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ x_2 - \ \ x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 3x_1 + \ x_2 - \ \ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \quad (4-1+9)-(6+6-1) = 12-11 = 1 \neq 0$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{matrix}$$

môžeme použiť CP

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 13 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \quad (0-13+6)-(4+0-13) = -7+9 = 2$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 13 & -2 & 3 \end{matrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 13 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-26-2+0)-(-39+12+0) = -28+27 = -1$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 13 & 3 \end{matrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 13 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-8 + 0 + 39) - (0 + 26 + 2) = 31 - 28 = 3$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 13 \end{matrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{1} = 2 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{3}{1} = 3$$

$(2, -1, 3)^T$

Dú: Str. 79 / 7, 9, 10, 12 - 15

Informácie k 2.ZP

22.5.2026 8:00 - 9:20: miestnosť ZP4: (študenti označení oranžovou farbou na zozname výsledkov malých písomiek od čísla 1-55)
22.5.2026 9:20 - 10:30: miestnosť ZP4: (ostatní študenti na zozname výsledkov malých písomiek od čísla 55-126)

čas: 80 minút

skladá sa z dvoch častí: teoretická (test **15** bodov)
praktická (príklady **40** bodov - 6 príkladov)

Okruhy: určenie monotónnosti funkcie (párnosť, nepárnosť, definičný obor)
určenie konvexnosti a konkávnosti funkcie (definičný obor)
operácie s maticami
výpočet determinantu matice
riešenie sústavy lineárnych rovníc pomocou Gaussovej eliminačnej metódy
riešenie sústavy lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

Opravné zápočtové previerky : oprava 2.ZP 29.5.2026
oprava 1+2.ZP 5.6.2026

Prihlasovanie v Maise**: na 2OZP:** 29.5.2026 (od 26.5.2026 do 12:00 28.5.2026)
na 1+2OZP: 29.5.2026 (od 1.6.2026 do 12:00 4.6.2026)