Matematika 1 – 11.cvičenie
príprava

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Determinant matice

determinant matice A – číslo, ktoré priradíme štvorcovej matici A typu n, označenie: **det A, resp. |A|**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Subdeterminant (minor) $\mathbf{D_{ij}}$ vzhľadom na prvok $\mathbf{a_{ij}}$ matice A je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním i -tého riadku a j -tého stĺpca matice A

subdeterminanty

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

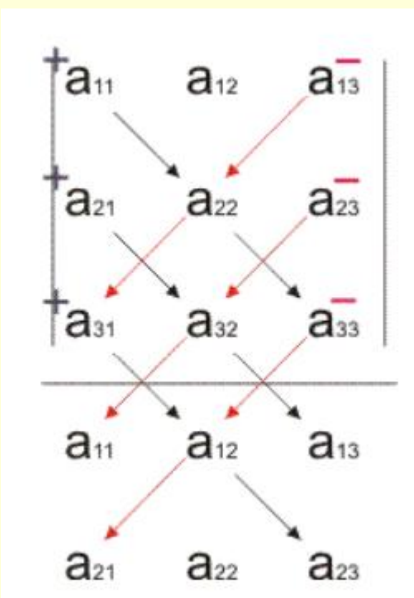
Výpočet determinantu matice

determinant 2. stupňa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

súčin prvkov na hlavnej diagonále mínus súčin prvkov na vedľajšej diagonále

determinant 3. stupňa - **Sarrusovo pravidlo -** pod tretí riadok v matici podpíšeme prvý a druhý riadok a násobíme po uhlopriečkach



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}\right)$$

determinant n - tého stupňa, $n \geq 4$ – počíta sa pomocou rozvoja determinantu podľa riadka alebo stĺpca

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} \overset{*}{+} \ldots + a_{in}A_{in}$$ **rozvoj podľa riadku**

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$ **rozvoj podľa stĺpca**

$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ je **algebrický doplnok**

D_{ij} je **subdeterminant prvku a_{ij}** matice A
(vznikne zakrytím i -tého riadku a j - tého stĺpca matice A)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \underline{\underline{A_{32}}} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$a_{32} = 4$

$$* \quad a_{32} \cdot A_{32} = a_{32} \cdot \underbrace{(-1)^{3+2} \cdot D_{32}}$$

Postup pri výpočte determinantu n - tého stupňa, $n \geq 4$:

1. Štvorcovú maticu A nahradíme determinantom $|A|$.

2. Determinant upravíme pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok (stĺpec) **obsahujúci čo najviac núl**.

3. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k **rozvoju determinantu**.

Úpravy v determinante:

- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vynásobením niektorého riadku matice A nenulovým číslom r, tak
  $|B| = r|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A pripočítaním reálneho násobku niektorého riadku matice A k inému jej riadku, tak $|B| = |A| \rightarrow$ **ekvivalentná úprava**

Sústavy lineárnych rovníc

Cramerovo pravidlo pre sústavu LR (n = 3)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Riešenie:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$ - môžeme použiť CP

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3)^T$

Postup pri výpočte SLR pomocou CP:

1. Vypočítame determinant D a overíme, že $D \neq 0$.
2. Vypočítame determinanty D_1, D_2, D_3.
3. Určíme hodnotu x_1, x_2, x_3.
4. Zapíšeme výsledok v tvare $(x_1, x_2, x_3)^T$.