

Kapitola 1

Základne pojmy

1.1 Základy matematickej logiky

Výrok je gramatická veta, ktorá je pravdivá, alebo nepravdivá. O jej pravdivosti vieme jednoznačne rozhodnúť. Výrok musí byť oznamovacia veta.

Každému výroku vieme priradiť jeho pravdivostnú hodnotu. Ak je výrok pravdivý, priradíme mu hodnotu 1 a ak je nepravdivý, hodnotu 0. Z výrokov vieme vytvárať nové výroky pomocou logických spojok medzi ktoré patrí negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia. Takto vytvorený výrok nazývame **zložený výrok**.

Nech A, B sú výroky, potom pre označenie logických spojok používame nasledujúce označenia:

1. NEGÁCIA: $\neg A, \bar{A}, A'$ (Čítame: Nie je pravda, že A .) Negovaný výrok nadobúda opačnú pravdivostnú hodnotu, ako výrok pôvodný.
2. KONJUNKCIA: $A \wedge B$ (Čítame: A a B .)
3. DISJUNKCIA: $A \vee B$ (Čítame: A alebo B .)
4. IMPLIKÁCIA: $A \Rightarrow B$ (Čítame: Ak A , tak B . resp. Keď A , potom B .)
5. EKVIVALENCIA: $A \Leftrightarrow B$ (Čítame: A práve vtedy, keď B . resp. A vtedy a len vtedy, keď B).

Pri tvorení nových matematických výrokov je dôležité upozorniť na dva fakty:

- V hovorovej reči chápeme spojku alebo vo vylučovacom zmysle, no v matematike sa chápe disjunkcia v nevylučovacom zmysle. Napr. vetu - „Zajtra o 13:00 budem doma, alebo v práci.” - chápeme tak, že môže nastať len práve jedna z možností. Nemôžeme byť na oboch miestach súčasne. Jedna sa teda o

výrok pravdivý, ak platí práve jeden z elementárnych výrokov. V matematike sa však spojka alebo chápe v nevylučovacom zmysle. To znamená, že predpokladáme, že môžu nastať aj oba elementárne výroky súčasne. Disjunkciu v matematike teda považujeme za pravdivú, ak je aspoň jeden z elementárnych výrokov pravdivý.

- Matematika chápe implikáciu doslova. To znamená, že sa jedná o výrok pravdivý v prípade, ak:
 - platia oba výroky A aj B súčasne, alebo
 - ak výrok A neplatí. V tomto prípade hovoríme, že implikácia platí triviálne.

Ako príklad si vezmeme vetu - „ Ak bude zajtra pekné počasie, pôjdem na túru.” - O situácii, keď zajtra pekne počasie nebude, nehovoríme nič. Ak nastala situácia, že pekné počasie nie je, triviálne predpokladáme, že sme neklamali a výrok je pravdivý.

Nech A, B sú výroky a nech $A \Rightarrow B$. Pre symbol implikácie vieme použiť niekoľko výrazov. Daný výrok môžeme prečítať nasledovne:

1. A implikuje B , alebo
2. B vyplýva z A , alebo
3. A je postačujúca podmienka pre výrok B , alebo
4. B je nutná podmienka pre A .

Výrok, ktorý je vždy pravdivý nazývame **tautológia**. Výrok, ktorý je vždy nepravdivý nazývame **kontradikcia**. Ak existuje aspoň jedna možnosť, kedy je výrok pravdivý hovoríme, že výrok je **splniteľný**.

Ďalšou možnosťou ako vytvárať nové výroky sú kvantifikátory. Poznáme dva základne kvantifikátory:

1. Symbol $\exists$ nazývame existenčný kvantifikátor (čítame: existuje).
2. Symbol $\forall$ nazývame všeobecný kvantifikátor (čítame: pre všetky).

V práci ďalej budeme používať aj špeciálny typ existenčného kvantifikátora. Jedna sa o symbol $\exists!$, ktorý čítame ako existuje práve jeden. Poznamenajme, že negáciou existenčného kvantifikátora získame kvantifikátor všeobecný a naopak.

Nech A, B a nech $A \Rightarrow B$ je implikácia dvoch elementárnych výrokov. Nazvime vetu $A \Rightarrow B$, veta **všeobecná**. Potom vetu:

1. $B' \Rightarrow A'$ nazývame veta obmenená.
2. $B \Rightarrow A$ nazývame veta obrátena.
3. $A \wedge B'$ nazývame negácia vety.

Veta všeobecná a veta obmenená nadobúdajú rovnaké pravdivostné hodnoty.

Definícia 1.1 *Nech A je výrok a nech množina M je neprázdnu množinou výrokov. Množinu výrokov M nazývame splniteľná práve vtedy, keď existuje také ohodnotenie výrokov, pri ktorom je pravdivý každý výrok z množiny M . Ak množina výrokov M nie je splniteľná, nazýva sa nesplniteľná. Hovoríme, že výrok A vyplýva z množiny výrokov M (A je sémantickým dôsledkom M) práve vtedy, keď A je pravdivý pri každom ohodnotení výrokových premenných, pri ktorom je pravdivý každý výrok z množiny M .*

1.1.1 Úlohy

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich viet sú výroky. Ak sa jedná o výrok, rozhodnite, či je pravdivý, alebo nepravdivý.
 - (a) Číslo 3 je prvočíslo.
 - (b) Číslo 20 je nepárne.
 - (c) Dnes je piatok.
 - (d) Počítaj!
 - (e) $\frac{0}{0} = 0$.
 - (f) Modré auto.
 - (g) $x > 2$.
 - (h) Zajtra bude pekne.
 - (i) V štvoruholníku sa uhlopriečky rozpolujú.
 - (j) $2x + 5 = 0$.
 - (k) Vonku prší.
 - (l) Množina všetkých bodov rovnako vzdialených od dvoch pevných bodov A, B je os úsečky AB .
2. Utvorte negácie nasledujúcich výrokov:
 - (a) Číslo 3 je prvočíslo.
 - (b) $3 < 5$.
 - (c) $7 = 2$.

- (d) Nie všetky čísla sú kladné.
 - (e) Číslo 75 je deliteľné číslom 15.
 - (f) Vltava je dlhšia ako Dunaj.
3. Vyjadrite symbolmi logiky. Pre vetu - Príde matka. - použite symbol M a pre vetu - Príde otec. - použite symbol O .
- (a) Ak príde otec, tak nepríde matka.
 - (b) Príde aspoň jeden z rodičov.
 - (c) Príde najviac jeden z rodičov.
 - (d) Príde práve jeden z rodičov.
4. Dané sú výroky: Kreslím (K). Píšem (P). Tancujem (T). Symbolicky zapíšte nasledujúce zložené výroky:
- (a) Keď spievam, nekreslím.
 - (b) Nepíšem, alebo netancujem, práve vtedy, keď kreslím.
 - (c) Netancujem, píšem.
 - (d) Ak nespievam a nekreslím, píšem.
5. Nech A, B sú výroky. A : Číslo končí nulou. B : Číslo je párne. Utvorte výroky:
- (a) $A \Rightarrow B$.
 - (b) $A' \Rightarrow B'$.
 - (c) $B \Rightarrow A$.
 - (d) $B' \Rightarrow A'$.
- a rozhodnite, ktorý výrok je pravdivý a ktorý je nepravdivý.
6. Jožo povedal: „ Ak dopoludnia napíšem dobre písomku z matematiky, večer pôjdem do kina. ” Sú štyri možnosti:
- (a) Jožo napísal písomku dobre, večer šiel do kina.
 - (b) Jožo napísal písomku dobre, večer nešiel do kina.
 - (c) Jožo nenapísal písomku dobre, večer šiel do kina.
 - (d) Jožo nenapísal písomku dobre, večer nešiel do kina.

V ktorých prípadoch dodržal Jožo slovo?

7. V dielni sú tri stroje, ktoré pracujú na základe týchto troch podmienok:

- (a) Ak pracuje prvý stroj, pracuje aj druhý stroj.
- (b) Pracuje druhý, alebo tretí stroj.
- (c) Ak nepracuje prvý stroj, nepracuje ani tretí stroj.

Rozhodnite, aké sú možnosti pre prácu týchto troch strojov.

8. Zistíte pravdivosť zloženého výroku: „Dnes je pondelok, alebo sa hrá futbal.“, ak v čase vypovedania výroku :

- (a) je pondelok aj sa hrá futbal.
- (b) je pondelok a futbal sa nehraje.
- (c) nie je pondelok a futbal sa hrá.
- (d) je streda a futbal sa nehraje.

9. Nech M, B, P, R označujú výroky: Murujem (M). Betónujem (B). Polievam (P). Rozmýšľam (R). Symbolicky zapíšte nasledujúce zložené výroky:

- (a) Keď murujem, nepolievam.
- (b) Nepolievam práve vtedy, keď murujem alebo betónujem.
- (c) Nebetónujem, murujem.
- (d) Ak rozmýšľam a polievam, tak betónujem.

10. Dvaja študenti čakajú na troch spolužiakov (Ivan, Peter a Monika), ktorí sú na skúške. Prvý hovorí: „Ak skúšku urobí Ivan a Peter, určite ju urobí aj Monika.“ Druhý hovorí: „Ja si zase myslím, že ak skúšku urobí Ivan a Monika nie, tak Peter skúšku nespraví.“ Tvrdia obaja to isté?

11. Olinka tvrdí: „Keď pijem kávu, dám si aj čokoládu. Ak nejem koláč, nejem ani čokoládu.“ Vyplýva z uvedených tvrdení, že:

- (a) Ak Olinka je koláč, tak nepije kávu?
- (b) Ak pije kávu, tak je aj koláč?

12. Tri obchody sú otvorené podľa týchto pravidiel: Otvorený je prvý obchod, alebo druhý nie je otvorený. Keď nie je otvorený tretí, prvý tiež nie je otvorený, ale druhý je. Ak nie je pravda, že je otvorený prvý, alebo tretí, tak je určite otvorený druhý. Rozhodnite, ktorý z nasledujúcich výrokov vyplýva z uvedených pravidiel.

- (a) Ak je tretí obchod otvorený a druhý nie, tak prvý je otvorený.
- (b) Ak je otvorený druhý obchod, sú otvorené aj zvyšné dva.

- (c) Ak nie je otvorený prvý, ani druhý obchod, tak je otvorený obchod tretí.
13. Určte predpoklady a tvrdenia nasledujúcich viet:
- (a) Súčin dvoch po sebe nasledujúcich párnych čísel je deliteľný číslom 8.
 - (b) Keď v trojuholníku je jeden uhol pravý, ostatné dva sú ostré.
 - (c) Pre pravouhlý trojuholník so stranami a, b, c platí: $a^2 + b^2 = c^2$.
 - (d) V trojuholníku je každá strana menšia ako súčet a väčšia ako rozdiel ostatných dvoch strán.
14. Zistíte, ktoré z predpokladov sú nutnými a ktoré postačujúcimi podmienkami:
- (a) Súčin dvoch čísel sa rovná nule, ak aspoň jeden z činiteľov sa rovná nule.
 - (b) Ak celé číslo končí číslicou 5, tak celé číslo je deliteľné číslom 5.
15. Napíšte v symbolickej forme (pomocou znakov logických spojok):
- (a) Nie len A , ale aj B .
 - (b) A a nie B .
 - (c) Hoci nie A , predsa B .
 - (d) Ani A , ani B .
 - (e) Nie je pravda, že A a súčasne aj B .
 - (f) Alebo nie A , alebo nie B .
 - (g) Nie je pravda, že A alebo B .
 - (h) Alebo nie A , alebo B .
 - (i) B predpokladajúc, že A .
 - (j) Nie A , ak nie B .
 - (k) Ak A , tak nie B .
 - (l) Nie je pravda, že ak A , tak aj B .
 - (m) Ak A , tak B , ale ak nie A , tak nie B .
 - (n) Ak A , tak nie B , ale ak nie A , tak B .
16. Utvorte negácie nasledujúcich výrokov:
- (a) Niektoré ženy, majú ryšavé vlasy.
 - (b) Všetky banány sú žlté.

- (c) Každý študent sa usilovne učí.
- (d) V každom ročníku FEI je študent, ktorý je usilovný.
- (e) V našej knižnici je kniha, ktorá má na každej strane tlačovú chybu.
- (f) Všetky školy v našom okrese majú nekvalifikovaného učiteľa.
- (g) V niektorej rodine sú všetci jej členovia vodiči.
- (h) Každému sa niekedy niečo nepáči.
- (i) Všetky školy v našom okrese majú triedu, v ktorej sú všetci študenti usilovní.
- (j) Existuje knižnica, ktorej všetky knihy majú na niektorej strane tlačovú chybu.
- (k) Je nemocnica, v ktorej každá sestrička ešte nejakého pacienta nevidela.
- (l) Existuje galaxia, v ktorej má každá slnečná sústava planétu, ktorej všetky satelity sú väčšie ako náš mesiac.
- (m) V niektorých knižniciach sú v každom oddelení nejaké knihy, ktoré majú na každej strane tlačovú chybu.

17. Utvorte negácie nasledujúcich výrokov:

- (a) Daná rovnica má aspoň dva reálne korene.
- (b) Najviac štyria žiaci získali vyznamenania.
- (c) Aspoň jeden žiak rieši olympiádu.
- (d) V tejto záhrade je aspoň dvadsať jabloní.
- (e) Každý deň je dôvod na radosť.
- (f) Nebol ani doma, ani v práci.
- (g) Dnes stihnem aj prácu, aj zábavu.
- (h) Bol som tam aspoň raz.
- (i) Každé celé číslo je súčinom dvoch prvočísel.
- (j) Nieкто z nás tam nebol.
- (k) Nikdy nikto nič nevie.
- (l) Každý trojuholník má aspoň jednu vpísanú kružnicu.
- (m) Každý trojuholník má práve jednu vpísanú kružnicu.

18. Utvorte negácie nasledujúcich výrokov:

- (a) $(\exists a \in \mathbb{R}) (a^2 + 1 < 0)$,

- (b) $(\forall x \in \mathbb{C}) ((x \in A) \vee (x \in B)),$
- (c) $(\exists x \in \mathbb{C}) ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)),$
- (d) $(\forall x \in \mathbb{C}) ((x \in A) \wedge (x \in B)),$
- (e) $(\exists x \in \mathbb{C}) ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)),$
- (f) $(\forall x \in \mathbb{Z}) (\forall y \in \mathbb{Z}) (\forall z \in \mathbb{Z}) (x + y = z),$
- (g) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) (\exists z \in \mathbb{R}) (\frac{x}{y} = z),$
- (h) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in (a - \delta, a + \delta)) (|f(x) - f(a)| < \varepsilon),$
- (i) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists x_0 \in \mathbb{R}) (\forall x \geq x_0) (|f(x) - fb| < \varepsilon).$

1.2 Matematický dôkaz

Axióma je výrok, ktorý považujeme za pravdivý. Nedokazujeme ho.

Platnosť (pravdivosť) matematických viet sa overuje (dokazuje) pomocou definícií, axióm a už dokázaných viet. Budeme rozlišovať 5 typov matematického dôkazu a to:

1. dôkaz priamo,
2. dôkaz nepriamo,
3. dôkaz sporom,
4. dôkaz matematickou indukciou,
5. dôkaz rozborom všetkých možností.

Dôkaz priamo: Nech $A \Rightarrow B$ je výrok. Vytvárame postupnosť výrokov $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, kde $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$. Výroky $A_i \Rightarrow A_{i+1}$, pre $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ sú buď axiómy, definície, alebo už dokázané vety. Ak veta nie je v tvare implikácie, často ju vieme na tvar implikácie preformulovať. Napríklad vetu - Druhá mocnina prirodzeného, nepárneho čísla je prirodzené, nepárne číslo. - vieme preformulovať na vetu - Ak $n \in \mathbb{N}$ je nepárne, tak $n^2 \in \mathbb{N}$ a je nepárne.

Príklad 1.1 Dokážte nasledujúce tvrdenie priamo: Druhá mocnina prirodzeného, nepárneho čísla je prirodzené, nepárne číslo.

Danú vetu preformulujeme tak, aby sme dostali tvrdenie v tvare implikácie. Dostávame tvrdenie: $(\forall n \in \mathbb{N}) : n \text{ je nepárne} \Rightarrow n^2 \text{ je nepárne}$. Začneme vytvárať postupnosť výrokov:

- $A = A(0) : n \in \mathbb{N} \text{ je nepárne} \Leftrightarrow$
- $A(1) : n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Leftrightarrow$
- $A(2) : n^2 = (2k + 1)^2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Leftrightarrow$
- $A(3) : n^2 = 4k^2 + 4k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Leftrightarrow$
- $A(4) : n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Leftrightarrow$
- $A(5) : n^2 = 2l + 1, l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Leftrightarrow$
- $A(6) : n^2 \text{ je nepárne číslo} = B$

Dôkaz nepriamo: Nech $A \Rightarrow B$ je výrok. Z výroku vytvoríme obmenenú vetu v tvare $B' \Rightarrow A'$. Túto vetu dokazujeme priamo. Využijeme fakt, že pravdivostné hodnoty oboch viet sú rovnaké.

Príklad 1.2 *Dokážte následujúce tvrdenie nepriamo: Ak n^2 je prirodzené, párne číslo, tak aj n je prirodzené, párne číslo.*

Najprv si vytvoríme matematický zápis daného tvrdenia: $(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 \text{ je párne} \Rightarrow n \text{ je párne}$. Následne z daného tvrdenia vytvoríme obmenenú vetu: $(\forall n \in \mathbb{N}) : n \text{ je nepárne} \Rightarrow n^2 \text{ je nepárne}$. Dostávame rovnaké tvrdenie ako v predchádzajúcom príklade, ktoré dokazujeme rovnako - priamo.

Dôkaz sporom: Nech $A \Rightarrow B$ je výrok. Z výroku vytvoríme negovaný výrok v tvare $A \wedge B'$. Tento výrok dokazujeme priamo. Na rozdiel od dôkazu priamo, na konci dôjdeme k sporu, teda k tvrdeniu o ktorom vieme rozhodnúť, že určite nie je pravdivé. To znamená, že dokazovaná negácia vety neplatí a teda musí platiť pôvodná veta.

Príklad 1.3 *Dokážte následujúce tvrdenie sporom: Druhá mocnina párneho čísla je číslo párne.*

Najprv si vytvoríme matematický zápis daného tvrdenia: $(\forall n \in \mathbb{N}) : n \text{ je párne} \Rightarrow n^2 \text{ je párne}$. Následne z daného tvrdenia vytvoríme negáciu vety: $(\exists n \in \mathbb{N}) : n \text{ je párne} \wedge n^2 \text{ je nepárne}$. Toto tvrdenie dokazujeme priamo. T.j. vytvárame postupnosť výrokov:

- $A = A(0) : n \in \mathbb{N} \text{ je párne} \Leftrightarrow$
- $A(1) : n = 2k, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
- $A(2) : n^2 = (2k)^2, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
- $A(3) : n^2 = 4k^2, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
- $A(4) : n^2 = 2(2k^2), k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
- $A(5) : n^2 = 2l, l = 2k^2 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
- $A(6) : n^2 \text{ je párne číslo} = B'$, čo je v spore s dokazovanou vetou. Negácia vety neplatí, platí pôvodne tvrdenie.

Dôkaz matematickou indukciou (MI) je metóda dokazovania matematických viet a tvrdení, ktorá sa používa, ak chceme ukázať, že dané tvrdenie platí pre všetky prirodzené čísla, prípadne inú, dopredu danú nekonečnú postupnosť. Predpokladajme, že chceme dokázať platnosť výroku $A(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$. Dôkaz matematickou indukciou pozostáva z dvoch častí:

1. Dokážeme platnosť tvrdenia pre $n = 1$, resp. pre najmenší prvok z uvažovanej množiny $n = n_0$. Toto nazývame báza indukcie. Z prvého kroku vyplýva, že existuje aspoň jedno také $n = n_0$, pre ktoré tvrdenie platí.
2. Ak existuje aspoň jedno také n , môžeme predpokladať, že tvrdenie $A(n)$ platí pre $\forall n \leq k$. Toto nazývame indukčný predpoklad (IP).
3. Ukážeme, že z platnosti tvrdenia pre $n = k$ (IP) vyplýva platnosť tvrdenia pre $n = k + 1$. Na túto časť dokazovania môžeme použiť už iné typy dôkazov.

T.j. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí: z indukčného predpokladu - platnosti $A(n)$ dokážeme, že platí aj $A(n + 1)$. Tým je tvrdenie $A(n)$ dokázané. Dostávame: Ak platí $A(1)$ tak platí aj $A(2)$, ak platí $A(2)$ tak platí aj $A(3)$, ..., a teda $A(n)$ platí $\forall n \in \mathbb{N}$.

Príklad 1.4 Dokážte nasledujúce tvrdenie matematickou indukciou: Súčet prvých n po sebe idúcich prirodzených čísel je rovný číslu $\frac{n(n+1)}{2}$.

1. Nech $n = 1$, potom $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \dots$ tvrdenie platí pre najmenšie n .
2. Predpokladáme, že veta platí pre všetky $n, n \leq k$. Je potrebné dokázať, že platí aj pre $n = k + 1$:

$$1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

čo je tvrdenie $V(k+1)$.

Dôkaz rozborom všetkých možností: Tento spôsob dôkazu je častokrát zdĺhavý, komplikovaný a u matematikov nie veľmi obľúbený.

Poznamenajme, že ak je veta v tvare implikácie $A \Leftrightarrow B$, tak ju dokazujeme v dvoch častiach: $A \Rightarrow B$ a zároveň $B \Rightarrow A$.

1.2.1 Úlohy

1. K nasledujúcim vetám napíšte obmenené, obrátené vety a negácie.
 - (a) Ak je trojuholník ABC pravouhlý, tak preň platí Pytagorova veta.
 - (b) Pre každé celé číslo x platí: Ak je číslo x deliteľné deviatimi, tak je deliteľné tromi.
 - (c) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : 2|x \wedge 2|y \Rightarrow 2|(x+y)$
 - (d) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$
 - (e) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : ((x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)) \Rightarrow xy > 0$

- (f) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : (xy = 0 \wedge x \neq 0) \Rightarrow y = 0$
- (g) Ak súčin dvoch čísel je párny, tak nie sú obidve čísla nepárne.
- (h) Ak funkcia f má v každom bode intervalu (a, b) kladnú deriváciu, tak funkcia f je na intervale (a, b) rastúca.

2. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- (a) $\sqrt{7 + \sqrt{7}} \geq 1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}$
- (b) $\sqrt{11 + \sqrt{10}} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$
- (c) $\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{6}} < 2 + \sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{6}}$
- (d) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$
- (e) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : -1 < \frac{x^2-1}{x^2+1} < 1$
- (f) Súčin dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.
- (g) Súčet dvoch párných čísel je párne číslo.
- (h) Súčet dvoch nepárnych čísel je párne číslo.
- (i) Súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo.
- (j) Súčin dvoch po sebe idúcich prirodzených čísel je vždy deliteľný dvoma.
- (k) Súčin dvoch ľubovoľných párných čísel je deliteľný štyrmi.
- (l) Ak $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$.
- (m) Ak $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$.
- (n) Kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$ má aspoň jeden reálny koreň rovný 0 práve vtedy, keď $c = 0$.
- (o) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \geq 2xy$.
- (p) Súčet kladného reálneho čísla a jeho prevrátenej hodnoty nie je menší ako 2. Je možné, aby sa rovnal dvom?
- (q) Ak celé číslo x nie je deliteľné tromi, tak $x^2 - 1$ je deliteľné tromi.

3. Pomocou matematickej indukcie dokážte nasledujúce tvrdenia pre $\forall n \in \mathbb{R}$:

- (a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
- (b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
- (c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.
- (d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
- (e) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
- (f) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{9}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

- (g) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$
- (h) $11 | (2^{2n-1} + 3^{4n-2}).$
- (i) $30 | (7^{4n+1} - 7).$
- (j) $48 | (7^{2n} - 1).$

4. Nech $n_0 \in \mathbb{N}$. Dokážte, že pre každé $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí:

- (a) $n! \geq 2^n$, $n_0 = 4$.
- (b) $2^n > n^2 + 2$, $n_0 = 5$.
- (c) $2^n > 2n$, $n_0 = 3$.
- (d) $3^n > n^3$, $n_0 \neq 3$.

1.3 Dirichletov princíp

Dirichletov princíp (niekedy tiež označovaný ako zásuvkový princíp, priehradkový princíp alebo princíp holubníkov) je matematické tvrdenie z teórie množín, prípadne kombinatoriky. Na rozdiel od typov dôkazov v predchádzajúcej kapitole nám tento princíp dáva iba odpoveď ÁNO/NIE. Nedáva konkrétne riešenie.

Veta 1.1 (Jednoduchá verzia) Nech $n, k \in \mathbb{N}$. Ak n je počet holubov a k je počet klieťok, pričom $k < n$, tak po rozmiestnení všetkých holubov do klieťok sú aspoň v jednej klieťke aspoň dva holuby.

Veta 1.2 (Všeobecná verzia) Nech $n, m \in \mathbb{N}$. Ak je viac ako mn holubov rozdelených do n klieťok, tak aspoň v jednej klieťke je viac ako m holubov.

Veta 1.3 (Zložitejšia verzia) Nech f je funkcia z konečnej množiny X do konečnej množiny Y ($f : X \rightarrow Y$). Nech $|X| = n$, $|Y| = m$ a $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$. Potom existuje aspoň k hodnôt $a_1, a_2, \dots, a_k \in X$ takých, že $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_k)$.

Dôkaz. Nech $f : X \rightarrow Y$, $|X| = n$, $|Y| = m$ a $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$. Označme $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Dôkaz vykonáme sporom. Predpokladajme, že tvrdenie vety nie je pravdivé. To znamená, že pre každé $i = 1, 2, 3, \dots, m$ existuje najviac ak $(k-1)$ prvkov $x \in X$ takých, že $f(x) = y_i$. To ale znamená, že definičný obor hodnôt funkcie f obsahuje najviac ak $m(k-1)$ hodnôt, teda $|X| \leq m(k-1)$. Z predpokladu $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ vyplýva, že $k-1 < \frac{n}{m}$. Potom

$$m(k-1) < m \frac{n}{m} = n,$$

čo je v spore s tým, že $|X| = n$. Pravdivé je teda pôvodné tvrdenie a teda existuje aspoň k hodnôt $x_1, x_2, \dots, x_k$ takých, že

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_k).$$

□

Príklad 1.5 *Konferencie sa zúčastnilo 70 delegátov, ktorí hovoria 11 rôznymi jazykmi. Jedným jazykom hovorí najviac 15 delegátov. Organizačný výbor rozhodol, že za oficiálny bude považovať taký jazyk, ktorým hovorí najmenej 5 delegátov. Dokážte, že na konferencii boli aspoň 3 oficiálne jazyky.*

Keďže delegátov je 70 a hovoria 11 jazykmi, iste jedným jazykom hovorí nie menej, ako 5 delegátov. Teda existuje jeden oficiálny jazyk, nazvime ho jazyk A. Jazykom A hovorí najviac 15 delegátov, t.j., ostatnými 10 jazykmi hovorí aspoň 55 delegátov. Medzi týmito 10 jazykmi sa musí nájsť jazyk (označme ho B), ktorým hovorí najmenej 5 delegátov. To je druhý oficiálny jazyk. Jazykom B hovorí najviac 15 delegátov, teda ďalšími 9 jazykmi hovorí aspoň 40 delegátov. Zasa podľa Dirichletovho princípu možno spomedzi týchto 9 jazykov vybrať jeden oficiálny. Existenciu štyroch oficiálnych jazykov nie je možné dokázať.

1.3.1 Úlohy

1. V pivnici máme 4 fľaše červeného a 2 bieleho vína. Prišli hostia a priali si červené víno ochutnať. Bohužiaľ fľaše sú tmavé, bez označenia a v pivnici je tma. Koľko fliaš musíme vziať, aby medzi nimi bola aspoň jedna fľaša červeného vína? (A ak by sme chceli aspoň dve fľaše červeného vína?)
2. Do obchodu priviezli 25 debničiek jabĺk troch druhov (v debničke bol vždy len jeden druh). Dá sa tam určite nájsť 9 debničiek toho istého druhu?
3. Neporiadny študent má v zásuvke päť párov rôznych ponožiek. Koľko kusov ponožiek musí po tme vybrať, aby si bol istý, že medzi nimi budú dve rovnakej farby.
4. Na škole je 1000 žiakov a 30 tried. Dá sa dokázať, že aspoň v jednej triede bude aspoň 34 žiakov?
5. V triede je 33 žiakov. Jeden žiak urobil v diktáte 15 chýb. Nikto nemal viac. Majú aspoň traja žiaci taký istý počet chýb? A štyria žiaci?
6. V zásuvke je 10 červených, 8 zelených, 8 modrých a 4 žlté pastelky. Pastelky vyberáme so zatvorenými očami. Koľko ich musíme vziať, aby medzi nimi boli

- (a) aspoň štyri tej istej farby?
 - (b) aspoň jedna z každej farby?
 - (c) aspoň šesť modrých?
7. Za 23 dni máme prijímacie skúšky a chceme ešte prepočítať 93 úloh. Doplňte správne výroky: „Musíme v aspoň jeden deň vyriešiť aspoň ... úloh.“
8. Koľko musí byť v skupine ľudí, aby sme mohli povedať, že aspoň dvaja
- (a) sa narodili v rovnakom dni v týždni.
 - (b) sa narodili v rovnakom mesiaci.
 - (c) majú narodeniny v rovnakom dni v roku?
9. Môžeme povedať, že na svete sú aspoň dvaja ľudia, čo sa narodili v tej istej minúte? (Predpokladajme, že nikto nie je starší ako 120 rokov.) A v tej istej sekunde?
10. Koľko musí byť v skupine ľudí, aby sme mohli určite tvrdiť, že v niektorom mesiaci v roku má aspoň päť z nich narodeniny?
11. Hádzeme dvoma kockami. Koľkokrát treba hodiť, aby sme mali zaručené, že dvakrát padol rovnaký súčet na kockách?
12. Koľkokrát treba hodiť tromi kockami, aby aspoň štyrikrát padol ten istý súčet.
13. Koľkokrát treba hodiť dvoma kockami, aby trikrát padla tá istá dvojica čísel.
14. Na konferencii sa zúčastnilo 40 delegátov, z 13 krajín. Dokážte, že delegácia aspoň jednej krajiny mala aspoň troch členov.
15. Konferencie sa zúčastnilo 70 delegátov, ktorí hovoria 11 rôznymi jazykmi. Jedným jazykom hovorí najviac 15 delegátov. Organizačný výbor rozhodol, že za oficiálny bude považovať ten jazyk, ktorým hovorí najmenej 5 delegátov. Dokážte, že na konferencii boli aspoň 3 oficiálne jazyky.
16. V pravidelnom dvadsaťuholníku je 9 vrcholov vyznačených zlatou farbou. Dokážte, že aspoň tri z nich tvoria rovnoramenný trojuholník.
17. V rovine je daných 17 bodov. Z nich žiadne tri neležia na tej istej priamke. Body sú spojené úsečkami žltej, červenej a modrej farby. Dokážte, že tak vznikne aspoň jeden „jednofarebný trojuholník“ (t.j. jeho strany sú úsečky rovnakej farby).

18. Máme štvorec so stranou dĺžky 10 metrov. V ňom je 101 bodov. Dokážte, že existuje trojuholník s obsahom 1 m^2 , v ktorom sú dva body.
19. V kocke s hranou 19 cm je 1332 bodov. Dokážte, že sú medzi nimi aspoň 2 body, ktoré majú vzdialenosť menšiu než 3.
20. Večer pred dážďom nám do chalupy nalietať veľa komárov. Spočítali sme tie, čo sa usadili na posteli s rozmermi $180\text{cm} \times 90\text{cm}$. Bolo ich 145. Bolo by aspoň teoretický možné, aby sme jednou ranou s plácačkou s rozmermi $15\text{cm} \times 15\text{cm}$ zasiahli aspoň tri z nich?
21. V priestore je 9 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že vieme z nich vybrať aspoň 2 body tak, že stred nimi určenej úsečky má celočíselné súradnice.
22. Dokážte, že zo 100 prirodzených čísel vieme vždy vybrať niekoľko takých, že ich súčet je deliteľný 100.
23. Je daných $n + 2$ ľubovoľných kladných celých čísel. Dokážte, že medzi nimi existujú dve, ktorých rozdiel je deliteľný číslom $2n$, alebo dve, ktorých súčet je deliteľný číslom $2n$.
24. V rovine vyberáme niekoľko bodov s celočíselnými súradnicami. Spojíme ich úsečkami a určíme stredy týchto úsečiek. Koľko musíme vziať bodov, aby aspoň jeden stred úsečky mal celočíselné súradnice?
25. Dokážte, že z 50 ľubovoľne zvolených navzájom rôznych prvočísel vieme vždy vybrať 13 prvočísel tak, že rozdiel každých dvoch je deliteľný piatimi.
26. Dokážte, že ku každému prirodzenému číslu n existujú prirodzené čísla $r \neq s$ také, že $3^r - 3^s$ je deliteľné číslom n .
27. Cestovná kancelária skúmala podmienky šiestich miest a zistila, že každé dve z nich majú medzi sebou buď autobusové alebo vlakové spojenie (ale nikdy nie obe). Môžeme z toho usúdiť, že aspoň tri z týchto miest sú vzájomne prepojené rovnakým druhom dopravy?
28. Dokážte, že v každej skupine šiestich ľudí sú buď aspoň traja ľudia, ktorí sa navzájom poznajú, alebo aspoň traja ľudia, ktorí sa navzájom nepoznajú.
29. Dokážte, že v každej skupine aspoň dvoch ľudí existujú aspoň dvaja ľudia, ktorí majú rovnaký počet známych v danej skupine.
30. Majme 20 navzájom rôzne prepojených procesorov. Ukážte, že aspoň dva procesory sú spojené s rovnakým počtom iných.

1.4 Algoritmy

Pod pojmom **algoritmus** rozumieme postupnosť jednoduchých a jednoznačných krokov, ktorá nás dovedie k žiadanému riešeniu konkrétneho problému.

Žiada sa, aby algoritmus mal tieto vlastnosti:

- elementárnosť – algoritmus sa skladá z jednoduchých (elementárnych) krokov, ktoré sú pre vykonávateľa (počítač, človek) zrozumiteľné.
- determinovanosť (jednoznačnosť) – každý krok algoritmu musí byť jednoznačne a presne definovaný, v každej situácii musí byť úplne zrejmé, čo a ako sa má vykonať.
- konečnosť – vykonávanie procesu opísaného algoritmom skončí vždy po konečnom počte krokov.
- rezultatívnosť – postup vedie po konečnom počte krokov k vyriešeniu úlohy a pre rovnaké vstupy dáva vždy rovnaké výsledky.
- efektívnosť – algoritmus má zabezpečiť riešenie problému, v čo najkratšom čase použitím čo najmenšieho počtu prostriedkov.
- hromadnosť – má byť použiteľný na celú triedu (vstupných) prípadov úlohy svojho typu.

Zápis algoritmu má mať tieto vlastnosti:

- jednoznačnosť, použitím pseudokódu. Ten musí byť jasný a presný. Používame štandardné kľúčové slová (WHILE, DO, FOR, ELSE, ...).
- bloková štruktúra (viditeľnosť z diaľky)
- 1 veta = 1 riadok
- krátke mená premenných

Úlohu na zostrojenie algoritmu riešiaceho daný problém možno riešiť spravidla mnohými rôznymi spôsobmi. Aby sme si z viacerých správne fungujúcich algoritmov mohli vybrať ten najlepší, potrebujeme mať nejaké kritérium, podľa ktorého by sme mohli algoritmy porovnávať. Algoritmy je možné hodnotiť z rôznych hľadísk, napríklad podľa toho, aké ľahké je pre nás takýto algoritmus napísať. Kritériá, ktoré sa obyčajne používajú pri hodnotení kvality algoritmov, sa nazývajú časová a pamäťová zložitosť (alebo tiež efektívnosť) algoritmov.

Pamäťovú zložitosť algoritmu definujeme ako závislosť pamäťových nárokov algoritmu na veľkosti riešeného problému. Vyjadrujeme ju ako počet premenných, resp. pamäťových miest, ktoré algoritmus pri výpočte so zvolenými vstupnými údajmi potrebuje. Pamäťová zložitosť algoritmu A je teda funkciou, ktorá

veľkosti vstupných údajov priraduje potrebný počet pamäťových miest, ktoré bude algoritmus A pri výpočte s týmito údajmi využívať.

Časovú zložitosť algoritmu môžeme definovať ako závislosť časových nárokov algoritmu na veľkosti konkrétneho riešeného problému alebo konkrétnych vstupných údajov. Neudávame ju však v žiadnych bežných časových jednotkách, pretože skutočná doba výpočtu programu realizujúceho navrhnutý algoritmus závisí tiež na množstve čisto technických parametrov, ako je napríklad rýchlosť procesora použitého počítača, zatiaľ čo my chceme charakterizovať rýchlosť práce algoritmu samého. Budeme preto časovú zložitosť vyjadrovať počtom elementárnych operácií.

Budeme hovoriť, že algoritmus vyrieši danú konkrétnu úlohu U v čase T , ak na jej vyriešenie potrebuje T elementárnych krokov. Za dĺžku úlohy budeme považovať množstvo vstupných dát príslušnej úlohy. S istým zjednodušením možno za množstvo dát považovať počet čísel, ktorými je úloha charakterizovaná (bez ohľadu na ich veľkosť). Tak napríklad graf možno zadať n vrcholmi a m hranami, preto dĺžka každej úlohy o grafe bude $(n + m)$. V grafových štruktúrach budeme obyčajne brať za dĺžku úlohy $(n + m)$ aj keď pôjde o ohodnotené grafové štruktúry. Funkcia $T(n)$ vyjadruje hornú hranicu počtu krokov algoritmu pre najhorší prípad úlohy s dĺžkou n . Nie je teda príliš dôležité, aké má algoritmus časové nároky pre malé hodnoty veľkosti vstupných údajov, pretože malé údaje bude takmer vždy možné algoritmicke spracovať v rozumnom čase. Podstatné je, ako sa chová funkcia vyjadrujúca časovú zložitosť algoritmov pre rastúce hodnoty. Hovoríme preto niekedy aj o asymptotickej časovej zložitosti. Časová zložitosť algoritmu býva obyčajne rastúcou funkciou. Z dvoch algoritmov budeme teda za časovo výhodnejší a efektívnejší považovať ten, ktorého funkcia časovej zložitosti s rastúcou hodnotou rastie pomalšie.

Definícia 1.2 *Nech $g(n), h(n)$ sú dve kladné funkcie definované na množine prirodzených čísel. Budeme písať $g(n) = O(h(n))$ a hovoriť, že funkcia $h(n)$ **asymptoticky dominuje** funkcii $g(n)$, ak existuje konštanta $k \in \mathbb{N}$ a prirodzené číslo $n_0 \in \mathbb{N}_0$ také, že $g(n) \leq k \cdot h(n)$ pre $\forall n \geq n_0$. Hovoríme, že algoritmus A **má zložitosť** $O(f(n))$, ak pre horný odhad $T(n)$ počtu krokov algoritmu A a úlohu dĺžky n platí $T(n) = O(f(n))$. Skrátene hovoríme o $O(f(n))$ algoritme. Špeciálne ak $f(n) \leq n^k$ pre nejaké konštantné $k \in \mathbb{N}$ hovoríme, že A je **polynomiálny** algoritmus. Hovoríme, že problém má zložitosť najvyššiu $O(f(n))$, ak preň existuje $O(f(n))$ algoritmus.*

Nech je daný problém P_1 so vstupnými dátami D_1 . Tento problém pretransformujeme na iný problém P_2 tak, že vstupné dáta D_1 prerobíme na vstupné dáta D_2 problému P_2 . Ak riešenie R_2 problému P_2 vieme prerobiť na riešenie R_1 problému P_1 , tak hovoríme o vhodnej transformácii. Ak prerobenie vyžaduje polynomiálny čas, hovoríme o polynomiálnej transformácii.

Ak existuje polynomiálny algoritmus riešenia úlohy P_2 , potom existuje aj polynomiálny algoritmus pre úlohu P_1 . Naopak to však nemusí platiť. Ak existuje polynomiálny algoritmus pre P_1 , polynomiálna redukovateľnosť P_1 na P_2 ešte nič nehovorí o zložitosti problému P_2 . Ak sú však problémy P_1, P_2 polynomiálne ekvivalentné, existencia polynomiálneho algoritmu pre jeden implikuje existenciu polynomiálneho algoritmu pre druhý. Keď už existuje polynomiálny algoritmus pre daný problém, potom jeho zložitosť zriedkakedy presiahne $O(n^6)$.

Definícia 1.3 *Hovoríme, že problém P je **NP-ťažký**, ak úlohu pre ktorú existuje polynomiálny algoritmus možno polynomiálne redukovať na P . Hovoríme, že problém P je **NP-lahký**, ak problém P možno polynomiálne redukovať na úlohu pre ktorú existuje polynomiálny algoritmus. Hovoríme, že problém P je **NP-úplný**, ak platia obe implikácie.*

Doteraz sa podarilo pre stovky úloh dokázať, že sú NP-úplne. Pre ďalšie sa podarilo dokázať, že sú NP-ťažké. Pre žiadnu NP-ťažkú úlohu sa doteraz nepodarilo nájsť polynomiálny algoritmus. Nepodarilo sa však ani dokázať, že polynomiálny algoritmus pre ne neexistuje. Nájdenie takého algoritmu pre jedinú zo stoviek NP-ekvivalentných úloh by znamenalo existenciu polynomiálneho algoritmu pre všetky ostatné. Všeobecne sa neverí, že by sa to mohlo niekomu podariť, preto sú na NP-zložitosti niektorých úloh založené napr. aj niektoré kryptografické systémy.

Vzhľadom na to, že mnohé úlohy sú NP-ťažké, vznikajú tzv. aproximačné algoritmy a heuristiky. V praxi nám totiž častokrát stačí, aby sme dostali dobré riešenie, ktoré, aj keď nebude práve optimálne, bude blízko optimálnemu. Mnohokrát nám stačí vykonať malú zmenu v zadaní a problém dokážeme riešiť v polynomiálnom čase. Vo všeobecnosti možno heuristiky rozdeliť na vytvárajúce a zlepšujúce. Vytvárajúca heuristika postupne vytvára riešenie tak, že začne najjednoduchším objektom (najčastejšie prázdnu množinou vrcholov), a potom tento objekt rozširuje podľa nejakého pravidla, ktoré dáva nádej, že výsledný objekt bude blízko optimálnemu. Najjednoduchším pravidlom je rozšíriť objekt o prvok (v teórii grafov najčastejšie o vrchol alebo hranu), ktorým sa dosiahne najlepšia kriteriálna funkcia rozšíreného objektu. Takúto metódu nazývame **pažravou metódou** – **greedy algorithm**. Zlepšujúce heuristiky vychádzajú z existujúceho prípustného riešenia a snažia sa z neho jednoduchými operáciami dostať iné blízke tzv. susedné riešenie s lepšou hodnotou kriteriálnej funkcie. Tak pokračujú dovtedy, kým nedospejú k takému riešeniu, ktoré už nemá žiadne lepšie susedné riešenie. Táto metóda sa nazýva metóda **prehľadávaní okolí** – **neighborhood search**. Metódu prehľadávaní okolí možno kombinovať s pravdepodobnostnou metódou tak, že ju spustíme na niekoľko náhodne vytvorených štartovacích riešení a za výsledok berieme to najlepšie z nájdených lokálnych optimálnych riešení.

Častokrát sa vzniknuté algoritmy dajú ešte vylepšovať a zrýchľovať. Medzi základne spôsoby zrýchľovania algoritmov patrí:

- prepočítanie výsledkov a ich uloženie do pamäte
- výpočet hodnôt na základe predchádzajúcich výpočtov
- využitie predchádzajúcich hodnôt
- predspracovanie výsledku
- odstránenie rekurzie
- odstránenie opakujúcich sa výpočtov