

Matematika 3 – 1.cvičenie, príprava

Faktoriál

Faktoriál čísla n je rovný súčinu všetkých prirodzených čísel, ktoré sú menšie alebo rovné číslu n . Faktoriál zapisujeme pomocou výkričníka.

platí:

pre $n \geq 1$	$n! = n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots 3.2.1$
	$0! = 1$

Napr. : $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\begin{aligned}(2n)! &= 2n(2n-1)(2n-2) \dots \dots \dots 3.2.1 \\ (n+2)! &= (n+2)(n+1)n(n-1) \dots \dots \dots 3.2.1 \\ (n-1)! &= (n-1)(n-2)(n-3) \dots \dots \dots 3.2.1\end{aligned}$$

Faktoriál vieme rozpísať podľa potreby: napr.: $\frac{3!}{5!} = \frac{3!}{5.4.3!} = \frac{1}{5.4}$

Napr.: pri úprave výrazu $\frac{(n+3)!}{n!}$, rozpíšeme čitateľa po $n!$, aby sme ho vykrátili s menovateľom: $(n+3)(n+2)(n+1)n!$

$$\frac{(n+3)!}{n!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+3)(n+2)(n+1)$$

Limita postupnosti

Postupnosť čísel - označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde a_n je n – tý člen

$$\text{Napri.: } \{n + 2\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 4, 5, \dots\}$$

Limita postupnosti – je reálne číslo a , ak pre každé $\varepsilon > 0, \varepsilon \in R$, existuje $n_0 \in N$, že pre každé $n > n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$, t.j. $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

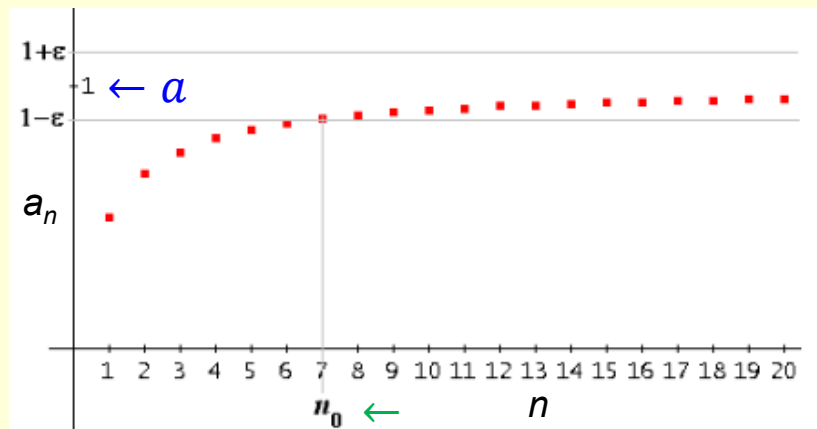
Zápis limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Je to číslo $a \in R$, že pre ľubovoľne zvolené malé ε , vždy nájdeme taký index n_0 , od ktorého budú všetky členy postupnosti ležať v páse od $a - \varepsilon$ do $a + \varepsilon$

$$\text{Napri.: } \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \leftarrow a$$



od $n_0 = 7$ ležia všetky členy danej postupnosti v páse od $1 - \varepsilon$ do $1 + \varepsilon$

Pri výpočte limity:

a) ak po dosadení za n dostaneme **neurčitost'** $\frac{\infty}{\infty}$, delíme čitateľa aj menovateľa **najvyššou mocninou v menovateli** (ak v čitateli a menovateli polynómy)

Platí: $\infty \cdot \infty = \infty$, $-\infty \cdot -\infty = \infty$, $-\infty \cdot \infty = -\infty$, $c \cdot \infty = \infty$
 $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty + c = \infty$, $\sqrt{\infty} = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

b) dosadíme, ak **neurčitost'** 1^∞ , použijeme pri úprave **jeden zo vzorcov**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n = e^{\pm 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Rozklad racionálnej funkcie na elementárne (parciálne) zlomky

Funkciu $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazývame **racionálnou funkciou**, kde n, m - stupňe polynómov.

Ak $n < m$ je funkcia $f(x)$ **rýdzoracionálna**. Vieme ju rozložiť na súčet parciálnych zlomkov, ak má **jednoduché korene (jednonásobné)** ich tvar bude

$$\frac{A}{x-\alpha} \quad \alpha - \text{koreň polynómu}$$

Napr.:
$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4x+3} = \frac{2x}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-1)}$$

Opakovanie - úprava kvadratického výrazu $ax^2 + bx + c$

1. pomocou diskriminantu $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \leftarrow$$

Úprava na súčin koreňových činiteľov

2. pomocou Vietovych vzťahov

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) \quad \leftarrow$$

Úprava na súčin koreňových činiteľov

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x_1 + x_2 = -b \quad \text{ak } a = 1$$

3. doplnením na štvorec a použitím vzorca $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$x^2 \pm bx \pm c = \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 \pm c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

vždy znamienko mínus

Úprava kvadratického výrazu doplněním na štvorec:

Pr. 1

$$x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + 10 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{40}{4} - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} =$$

$$\underbrace{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2}_{\text{a}} - \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\text{b}} = \left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right) = (x - 5)(x - 2)$$

Pr. 2

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 + 3 - 4 = (x - 2)^2 - 1 = \underbrace{(x - 2)}_{\text{a}}^2 - \underbrace{(1)}_{\text{b}}^2 =$$

$$(x - 2 - 1)(x - 2 + 1) = (x - 3)(x - 1)$$

Úprava pomocou Vietovych vzťahov:

Pr. 3

$$x^2 + 6x + 9$$

$$x_1 \cdot x_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 9 = 3 \cdot 3 \\ 9 = (-3) \cdot (-3) \end{array}$$

$$x_1 + x_2 = -6$$



$$3 + 3 \neq -6$$

$$-3 + (-3) = -6$$



$$x_1 = -3, x_2 = -3$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$