

Matematika 3 – 1.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Cvičiaca: RNDr. Z. Gibová, PhD.

zuzana.gibova@tuke.sk

Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č.k.: 614

Konzultácie: utorok 9:30 – 11:00, v iný deň po dohode mailom

- cvičenia (povinné, max. dovolené tri ospravedlnené absencie), prednášky (link na stránke [KMTI – Výučba – aktuálne predmety – Matematika III - Oznamy](#))

Prenášajúci: prof. RNDr. Jozef Džurina, CSc.

Minimálne požiadavky na získanie zápočtu:

2 zápočtové písomky – získať v súčte **aspoň 21 bodov zo 40 bodov**

1ZP – po prebratí nekonečných číselných radov

[Píšu sa mimo cvičenia.](#)

[Odporúčame prísť na predtermín – ľahšie príklady.](#)

Všetky materiály z prednášok (len ak na prednáške nadpolovičný počet pripojených študentov), ale aj dú z cvičenia na stránke KMTI

Literatúra k cvičeniam

- Grinčová, Petrillová: MATEMATIKA III v príkladoch (FEI)

Faktoriál

Faktoriál čísla n je rovný súčinu všetkých prirodzených čísel, ktoré sú menšie alebo rovné číslu n . Faktoriál zapisujeme pomocou výkričníka.

platí:

pre $n \geq 1$	$n! = n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots 3.2.1$
	$0! = 1$

Napr. : $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\begin{aligned}(2n)! &= 2n(2n-1)(2n-2) \dots \dots \dots 3.2.1 \\ (n+2)! &= (n+2)(n+1)n(n-1) \dots \dots \dots 3.2.1 \\ (n-1)! &= (n-1)(n-2)(n-3) \dots \dots \dots 3.2.1\end{aligned}$$

Faktoriál vieme rozpísať podľa potreby: napr.: $\frac{3!}{5!} = \frac{3!}{5.4.3!} = \frac{1}{5.4}$

Napr.: pri úprave výrazu $\frac{(n+3)!}{n!}$, rozpíšeme čitateľa po $n!$, aby sme ho vykrátili s menovateľom: $(n+3)(n+2)(n+1)n!$

$$\frac{(n+3)!}{n!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+3)(n+2)(n+1)$$

Pr. 1 – 1.1: Upravte výraz

$$\frac{(n+6)!}{(n+4)!} - \frac{n!}{(n-2)!}$$

Pr. 2 – 1.2: Upravte výraz

$$\frac{(2n+1)!}{(2n)!} \cdot \frac{(n+5)!}{(n+3)!}$$

Pr. 3 – 1.3: Upravte výraz

$$\frac{(n+3)!}{n!(n+1)}$$

$$[(n+3)(n+2)]$$

$$\frac{(n+3)!}{n!(n+1)} = \frac{(n+3)(n+2)(\cancel{n+1})\cancel{n!}}{\cancel{n!}(\cancel{n+1})} = (n+3)(n+2)$$

Pr. 4 – 1.4: Upravte výraz

$$\frac{(n^2 - 4) n!}{(n + 2)!} + \frac{n!}{(n - 3)! (n - 2)}$$

Pr. 5 – 1.5: Upravte výraz

$$\frac{(2n-1)!}{3 \cdot (2n)!} \cdot \frac{n!}{(n-2)!} \quad \left[\frac{1}{6}(n-1) \right]$$

$$\frac{(2n-1)!}{3 \cdot (2n)!} \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(2n-1)!}{3 \cdot \cancel{(2n)} \cancel{(2n-1)}!} \cdot \frac{\cancel{n}(n-1)\cancel{(n-2)}!}{\cancel{(n-2)}!} = \frac{1}{6}(n-1)$$

Dú: příklady 1.6 -1.11

Limita postupnosti

Postupnosť čísel - označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde a_n je n – tý člen

$$\text{Napri.: } \{n + 2\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 4, 5, \dots\}$$

Limita postupnosti – je reálne číslo a , ak pre každé $\varepsilon > 0, \varepsilon \in R$, existuje $n_0 \in N$, že pre každé $n > n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$, t.j. $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

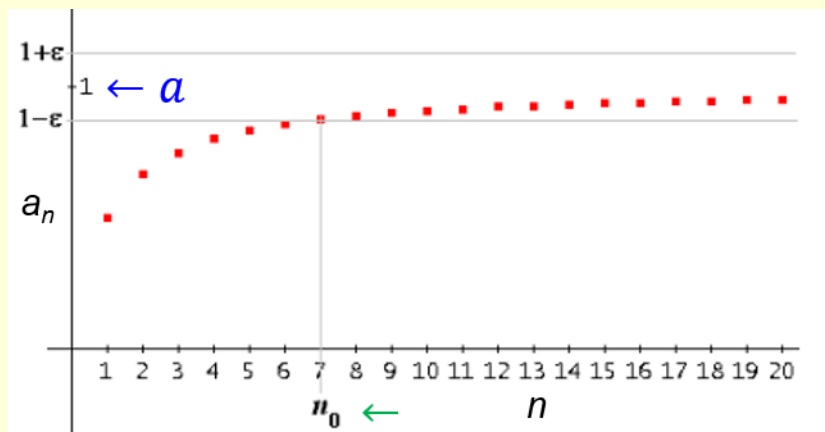
Zápis limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Je to číslo $a \in R$, že pre ľubovoľne zvolené malé ε , vždy nájdeme taký index n_0 , od ktorého budú všetky členy postupnosti ležať v páse od $a - \varepsilon$ do $a + \varepsilon$

$$\text{Napri.: } \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \leftarrow a$$



od $n_0 = 7$ ležia všetky členy danej postupnosti v páse od $1 - \varepsilon$ do $1 + \varepsilon$

Pri výpočte limity:

a) ak po dosadení za n dostaneme **neurčitost'** $\frac{\infty}{\infty}$, delíme čitateľa aj menovateľa **najvyššou mocninou v menovateli** (ak v čitateli a menovateli polynómy)

Platí: $\infty \cdot \infty = \infty$, $-\infty \cdot -\infty = \infty$, $-\infty \cdot \infty = -\infty$, $c \cdot \infty = \infty$
 $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty + c = \infty$, $\sqrt{\infty} = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

b) dosadíme, ak **neurčitost'** 1^∞ , použijeme pri úprave **jeden zo vzorcov**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n = e^{\pm 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Pr. 1 – 2.1: Vypočítajte limitu postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 5n + 2}{2n^2 + 3}$$

Pr. 2 – 2.2: Vypočítajte limitu postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{3n^2}$$

$$\left[\frac{1}{3} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{3n^2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{3 \frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Pr. 3 – 2.3: Vypočítajte limitu postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 7n^2 + 10}{n - 1}$$

Pr. 4 – 2.4: Vypočítajte limitu postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 10}{4n^5 + n^2}$$

Pr. 5 – 2.6: Vypočítajte limitu postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 8}{n^2 - 4n + 5}$$

[∞]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 8}{n^2 - 4n + 5} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^5}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{1} = \infty$$

Pr. 6 – 2.8 : Vypočítajte limitu postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+3} \right)^n$$

Pr. 7 – 2.9: Vypočítajte limitu postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right)^{2n}$$

Pr. 8 – 2.11: Vypočítajte limitu postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$$

Pr. 9 – 2.10: Vypočítajte limitu postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^{n-1} \quad [e^3]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^{n-1} \stackrel{1^\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^{n-1 \frac{n+1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{\frac{n-1}{n+1}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [e^3]^{\frac{n-1}{n+1}} = e^{3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1}} = e^{3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}}} = e^{3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = e^3$$

Dú: príklady 2.5, 2.7, 2.12 – 2.14

Rozklad racionálnej funkcie na elementárne (parciálne) zlomky

Funkciu $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazývame **racionálnou funkciou**, kde n, m - stupňe polynómov.

Ak $n < m$ je funkcia $f(x)$ **rýdzoracionálna**. Vieme ju rozložiť na súčet parciálnych zlomkov, ak má **jednoduché korene (jednonásobné)** ich tvar bude

$$\frac{A}{x-\alpha} \quad \alpha - \text{koreň polynómu}$$

Napr.:
$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4x+3} = \frac{2x}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-1)}$$

Pr. 1 – 3.1: Rozložte na parciálne zlomky nasledujúce výrazy:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Pr. 2 – 3.2: Rozložte na parciálne zlomky nasledujúce výrazy:

$$\frac{14}{(n+3)(n-4)}$$

$$\left[\frac{2}{n-4} - \frac{2}{n+3} \right]$$

$$\frac{14}{(n+3)(n-4)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n-4} = \frac{-2}{n+3} + \frac{2}{n-4}$$

$$14 = A(n-4) + B(n+3)$$

$$\begin{aligned} n = 4: \quad 14 &= B(4+3) \\ 14 &= B7 \\ 2 &= B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = -3: \quad 14 &= A(-3-4) \\ 14 &= -7A \\ -2 &= A \end{aligned}$$

Pr. 3 – 3.3: Rozložte na parciálne zlomky nasledujúce výrazy:

$$\frac{-2}{n^3 - n}$$

$$\frac{-2}{n^3 - n} = \frac{-2}{n(n-1)(n+1)}$$

Dú: príklady 3.3 dokončiť- 3.7