

Matematika 3 – 2.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

1. NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ RADY (NČR)

1.1 Definícia NČR a jeho súčet

Postupnosť čísel - $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, kde a_n je n - tý člen

$$\text{Napri.: } \{n + 2\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 4, 5, \dots\}$$

Nekonečný číselný rad (NČR) – sčítaním členov postupnosti čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, \text{ kde číslo } a_n \text{ nazývame } n\text{-tý člen NČR}$$

$$\text{Napri.: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{n} + \dots$$

Čiastočné súčty

$$s_1 = a_1 = 2$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 1 + \frac{2}{3}$$

n -tý čiastočný súčet NČR – súčet prvých n členov

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

súčet NČR - súčet všetkých členov NČR

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Určenie súčtu NČR:

1. ak existuje konečná limita $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (napr. 1, - 5, 0, 3), tak číslo **s** nazývame **súčet radu**, hovoríme, že NČR **konverguje**
2. ak neexistuje konečná limita ($\pm\infty$), hovoríme, že NČR **diverguje**

Použitie: ak NČR obsahuje členy v tvare rýdzoracionálneho výrazu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n - 4)(5n + 1)}$$

Úprava na rozklad na súčet parciálnych zlomkov.

Nutná podmienka konvergenzie: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ alebo neexistuje, rad diverguje.

1.2 Harmonický a geometrický rad

Zovšeobecnený harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ pre } \alpha > 0$$

$\alpha > 1$ rad konverguje

$\alpha \leq 1$ rad diverguje

$\alpha = 1$ špeciálny prípad: **harmonický rad**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{diverguje}$$

Geometrický rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^n + \dots, \text{ kde } a_1 \neq 0$$

$|q| < 1$ rad konverguje

$|q| \geq 1$ rad diverguje

q – koeficient GR: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, a_1 – prvý člen

Súčet GR $s = \frac{a_1}{1 - q}$, pre $|q| < 1$

Použitie: ak NČR je v tvare číslo umocnené na n

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10}{4^{n+2}}$$

Pr. 1 – str. 11 / 13: Určte súčet NČR:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$$

1

Pr. 2 – str. 11 / 4: Určte súčet NČR:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$$

$$\frac{1}{3}$$

Úprava menovateľa na súčin koreňových činiteľov: $(n^2 + 5n + 6) = (n + 2)(n + 3)$

1. Upraviť rýdzoracionálny výraz pod sumou na súčet parciálnych zlomkov

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 5n + 6)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 2)(n + 3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{(n + 2)} + \frac{B}{(n + 3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 2)} + \frac{-1}{(n + 3)}$$

$$1 = A(n + 3) + B(n + 2)$$

$$n = -2: 1 = A(-2 + 3) \rightarrow A = 1$$

$$n = -3: 1 = B(-3 + 2) \rightarrow B = -1$$

2. Určiť n- tý čiastočný súčet s_n – napíšeme si niekoľko prvých a posledných členov radu

Jednotlivé členy s_n dostaneme dosadením za $n = 1, 2, \dots$ do predpisu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 2)} + \frac{-1}{(n + 3)}$;

$$a_1 = \frac{1}{(1+2)} + \frac{-1}{(1+3)} = \left(\frac{1}{3} + \frac{-1}{4}\right) \text{ pre } n = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{(2+2)} + \frac{-1}{(2+3)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{-1}{5}\right) \text{ pre } n = 2$$

n- tý čiastočný súčet:

$$s_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{-1}{4} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{4} + \frac{-1}{5} \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{5} + \frac{-1}{6} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n-1+2} + \frac{-1}{n-1+3} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+2} + \frac{-1}{n+3} \right)$$

$$n = 1$$

$$n = 2$$

$$n = 3$$

$$n - 1$$

$$n$$

Všímame si rovnaké menovatele
a vidíme, že niektoré členy sa odčítajú.
Druhý člen prvej zátvorky sa odčíta s
prvým členom druhej zátvorky atď..
K tomu, aby sme členy odčítali,
potrebujeme dve po sebe idúce zátvorky.
Ďalšie škrtnuté členy sa odčítajú
s členmi v nasledujúcich, resp.
predchádzajúcich zátvorkách.

Po úprave: $s_n = \frac{1}{3} + \frac{-1}{n+3}$

3. Výpočet součtu s

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{-1}{n+3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{n+3} \right) = \frac{-1}{\infty} = 0$$

Součet NČR je $1/3$ (konečné číslo), tedy NČR konverguje.

Pr. 3 – str. 11 / 27: Určte súčet NČR:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)} \qquad \frac{3}{2}$$

Pr. 4 – str. 15 / 42: Určte súčet NČR:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-2)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$-\frac{2}{45}$$

Pr. 5 – str. 15 / 36: Určte súčet NČR:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$$

$$-\frac{2}{5}$$

1. Určiť prvý člen a_1 a koeficient q geometrického radu

Prvý člen dostaneme dosadením za $n = 1$ do predpisu radu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

$$a_1 = \frac{(-2)^1}{3^1}$$

Koeficient je daný $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, kde $a_{n+1} = \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+1}}$, $a_n = \frac{(-2)^n}{3^n}$. Po dosadení a úprave:

$$q = \frac{-2}{3}$$

2. Overiť $|q| < 1$ (podmienka pre použitie vzorca pre súčet geometrického rádu)

$$|q| = \left| \frac{-2}{3} \right| < 1 \rightarrow \text{rad konverguje, môžeme vypočítať jeho súčet}$$

3. Výpočet súčtu GR

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{-2}{3}}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{-2}{5}$$