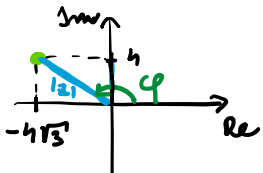


PRÍKLADY NA OPAKOVANIE:

PREPÍŠME DO GONIOM. A EXPON. TVARU

a) $z_1 = -4\sqrt{3} + 4i$
II. kv.



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2}$$

$$|z| = \sqrt{48 + 16} = \sqrt{64}$$

$$|z| = 8$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{y}{|z|}$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{4}{8}$$

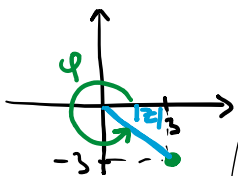
$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi = \pi - \varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$z_1 = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = 8 \cdot (\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi)$$

$$z_1 = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi} = 8 \cdot e^{i \cdot \frac{5}{6}\pi}$$

b) $z_2 = 3 - 3i$



IV. kv.

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2}$$

$$|z| = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$$

$$|z| = 3\sqrt{2}$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\varphi = 2\pi - \varphi_0 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

$$z_2 = 3\sqrt{2} (\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$$

$$z_2 = 3\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{7}{4}\pi}$$

OPERÁCIE S KČ V GONIOMETRICKOM TVARE (POKRAČOVANIE)

n-TÁ MOCNINA (z^n) KČ

- ROBIŤE JU TAK, ŽE MODUL UMOCNÍME NA n-TÚ A AMPLITÚDU VYNÁSOBIŤE n-KOM

n-TÁ MOCNINA $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (MOIVROVA VETA)

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME z^{12} ; AK $z = 2 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right)$

$$z^{12} = 2^{12} \cdot \left(\cos 12 \cdot \frac{5}{6}\pi + i \sin 12 \cdot \frac{5}{6}\pi \right) = 2^{12} \cdot (\cos 10\pi + i \sin 10\pi) = \dots$$

n-TÁ ODMOCNINA KČ (NIE JE NA PÍSOMKE :))

- MĀ STĀLE n ROZŤENĀ KOMPLEXNÝCH VÝSLEDKOV V TVARE

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right); k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME $\sqrt[3]{z}$; AK $z = 2 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right)$

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \dots$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = \dots$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) = \dots$$

OPERÁCIE S KČ V EXPONENCIÁLNOU TVARE

- ROBIŤE IDENTICKY AKO V GONIOMETRICKOM TVARE

SÚČIN KČ

NECH $z_1 = |z_1| \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$

$$z_2 = |z_2| \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$$

SÚČIN $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME SÚČIN KČ $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$
 $z_2 = \frac{4}{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = \underline{\underline{4 e^{i \cdot \frac{3}{4}\pi}}}$$

PODIEL KČ

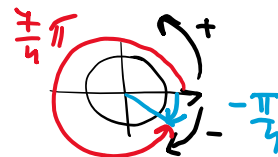
NECH $z_1 = |z_1| \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$
 $z_2 = |z_2| \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$

PODIEL $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME PODIEL $\frac{z_2}{z_1}$; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$
 $z_2 = \frac{4}{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\frac{4}{3}}{3} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = \underline{\underline{\frac{4}{9} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{\frac{4}{3}} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} = \frac{9}{4} \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{4})} = \underline{\underline{\frac{9}{4} \cdot e^{i \cdot \frac{7}{4}\pi}}}$$



n -TÁ MOCNINA KČ

NECH $z = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$

$z^n = |z|^n \cdot e^{i \cdot n\varphi}$

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME z^{26} ; $z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$

$$z^{26} = \left(2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}\right)^{26} = 2^{26} \cdot e^{i \cdot 26 \cdot \frac{\pi}{3}} = 2^{26} \cdot e^{i \cdot \frac{26}{3}\pi} = \dots$$

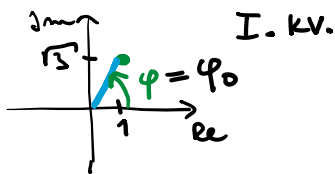
PRÍKLAD: VYPOČÍTAME A VÝSLEDOK PREVEDĚME DO ALGEBRAICKÉHO TVARU

a) $(1 + \sqrt{3}i)^{17}$

b) $(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^{99}$

KĽ V ALGEBR. TVARE PREVEDIEME DO GONIOM. TVARU, PRE UMOCNENIE POUŽIJEME MOIVROU VETU A VÝSLEDOK PREVEDIEME SPÄŤ DO ALGEBR. TVARU

a) $z = 1 + \sqrt{3}i$



$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$|z| = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3} = \varphi$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z^{17} = 2^{17} \cdot \left(\cos \frac{17\pi}{3} + i \sin \frac{17\pi}{3} \right) = 2^{17} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2^{17} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

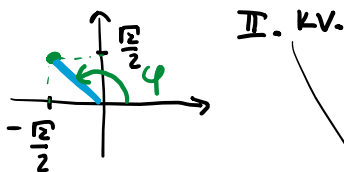
$$17 : 6 = 2$$

$$zv. 5$$

IV. kv.

$$= 2^{16} (1 - \sqrt{3}i)$$

b) $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$



$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$|z| = 1$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\varphi = \pi - \varphi_0 = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$z^{99} = \cos 99 \cdot \frac{\pi}{4} + i \sin 99 \cdot \frac{\pi}{4} = \cos \frac{297\pi}{4} + i \sin \frac{297\pi}{4} =$$

$$297 : 8 = 37$$

$$zv. 1$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

MATICE

MATICA TYPU $m \times n$ JE SÚSTAVA PRVKOV ZAPÍSANÝCH DO SCHÉMY S m RIADKAMI A n STĽPCAMI; $m, n \in \mathbb{N}$;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{HLAVNÁ DIAGONÁLA}$$

KDE a_{ij} SÚ PRVKY MATICE; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

ŠPECIÁLNE TYPY MATIC

- **SUBMATICA MATICE A** - MATICA, KTORÁ VZNIKNE Z MATICE A VYNECHANÍM 1 RIADKU A 1 STĽPCA

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sub } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **ŠTVORCOVÁ MATICA STUPŇA n** - MATICA TYPU $n \times n$ (POČET RIADKOV A STĽPCOV JE ROVNÝ)

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

- **RIADKOVÝ VEKTOR** - MATICA TYPU $1 \times n$ (MATICA S 1 RIADKOM)

$$A = (1 \ 2 \ 0 \ -5)$$

- **STĽPCOVÝ VEKTOR** - MATICA TYPU $m \times 1$ (MATICA S 1 STĽPCOM)

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- **NULOVÁ MATICA** - VŠETKY PRVKY MATICE SÚ NULY

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **DIAGONÁLNA MATICA** - ŠTVORCOVÁ MATICA, KTOREJ PRVKY MIMO HLAVNEJ DIAGONÁLY SÚ NULY

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

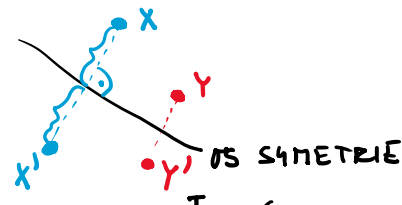
- **JEDNOTKOVÁ MATICA** - ŠTVORCOVÁ DIAGONÁLNÁ MATICA, KTOREJ PRVKY NA HLAVNEJ DIAGONÁLE SÚ JEDNOTKY

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **SYMETRICKÁ MATICA** - ŠTVORCOVÁ MATICA SYMETRICKÁ POČÍŤA HLAVNEJ DIAGONÁLY

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -7 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

a_{12} a_{21} OS SYMETRIE



- **TRANSPONOVANÁ MATICA** A^T K MATICI $A = (a_{ij})$ JE MATICA $A^T = (a_{ji}) \rightarrow$ RIADKY PŮVODNEJ MATICE A SÚ STĚPCAMI TRANSPONOVANEJ MATICE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- **HORNÁ TROJUHOLNÍKOVÁ MATICA** - ŠTVORCOVÁ MATICA, KTOREJ PRVKY POD HLAVNOU DIAGONÁLOU SÚ ROVNĚ NULE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- **LICHOBĚŽNÍKOVÁ MATICA** - MATICA, KTOREJ PRVKY POD HLAVNOU DIAGONÁLOU SÚ ROVNĚ NULĚ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

OPERÁCIE S MATICAMI

SÚČET A ROZDIEL MATÍC ($A+B$; $A-B$)

- EXISTUJĚ LEN PRE MATICE ROVNAKĚMO TYPU (AK JE $\underline{A}$ TYPU $m \times n$, TAK AJ MATICA $\underline{B}$ MUSÍ BYŤ TYPU $m \times n$)

- SA ROBÍ PO ZLOŽKÁCH A PRE PRVKY VÝSLEDNEJ MATICE $\underline{C}$

PLATÍ V PRÍPADE SÚČTU: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

V PRÍPADE ROZDIELU: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

PRÍKLAD: NECH $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. URČME $A+B$; $A-B$; $B-A$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+(-2) & 2+(-1) & 3+(-1) \\ -1+0 & 2+1 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-(-2) & 2-(-1) & 3-(-1) \\ -1-0 & 2-1 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B-A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{LEBO} \quad B-A = -(A-B)$$

K-NÁSOBOK MATICE ; $k \in \mathbb{R}$

- KAŽDÝ PRVOK MATICE VYNÁSOBÍME REÁLNYM ČÍSLOM k

PRÍKLAD: NECH $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. VYPOČÍTAME 3 · A

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

PRÍKLAD: NECH $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. VYPOČÍTAME

$$2 \cdot A + B - 3C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

SÚČIN MATICE $A \cdot B$

- EXISTUJE LEN Vtedy, AK POČET STĽPCOV MATICE A JE ROVNÝ AKO POČET RIADKOV MATICE B

- AK A JE TYPU $m \times n$; B JE TYPU $n \times l \Rightarrow C = A \cdot B$ JE TYPU $m \times l$

- PRVOK c_{ij} VÝSLEDNEJ MATICE C JE VÝSLEDKOM SKALÁRNEHO SÚČINU i-TEHO RIADKU MATICE A A j-TEHO STĽPCA MATICE B

PRÍKLAD: NECH VEKTOR $\vec{a} = (2, 1, 5)$; $\vec{b} = (0, -1, 4)$. NÁJDI ME SKALÁRNÝ SÚČIN $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 1, 5) \cdot (0, -1, 4) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 = 0 - 1 + 20 = \underline{\underline{19}}$

PRÍKLAD: VZŤME SÚČIN $C = A \cdot B$, AK EXISTUJE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3×2)

(2×4)

SÚČIN EXISTUJE, LEBO $2 = 2$

VÝSLEDNÝ ROZMER 3×4

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$