

PRÍKLADY NA OPAKOVANIE: VYPOČÍTAME $A \cdot B$; $A^2 - 3A$, AK SÚČINY EXISTUJÚ
 $B \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \times 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \times 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \times 3 \end{pmatrix} \text{ ROZMER VÝSLEDNEJ MATICE}$$

$2 = 2 \Rightarrow$ SÚČIN EXISTUJE

$$B \cdot A = \left\{ \begin{array}{l} \text{KOMENTÁR} \\ (2 \times 3) \cdot (2 \times 2) \end{array} \Rightarrow B \cdot A \text{ NEEKISTUJE} \right\}$$

$3 \neq 2 \Rightarrow$ SÚČIN NEEKISTUJE

$$A^2 - 3A = A \cdot A - 3A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+3 \\ 2+1 & 3+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 = 2 \times 2$

$\text{ozn. } I = E \rightarrow \text{JEDNOTKOVÁ MATICA}$

EKVIVALENTNÉ ÚPRAVY MATICE

- TAKÉ ÚPRAVY MATICE, KTORÉ NEMENIA **MODNOSŤ** MATICE

1. ZMENA PORADIA RIADKOV (STĽPCOV)
2. VYNÁSOBENIE RIADKA (STĽPCA) **NEVULOVOU KONŠTANTOU**
3. **PRÍPOČÍTANIE k-NÁSOBKU** RIADKU (STĽPCA) K INÉMU RIADKU (STĽPCU)

MATICE A, B NAZÝVAME RIADKOVO (STĽPCOVO) EKVIVALENTNÉ, AK SA JEĎNA Z MATÍC DAŤ UPRAVIŤ NA DRUHÚ POMOCOU EKVIVALENTNÝCH RIADKOVÝCH (STĽPCOVÝCH) ÚPRAV (OZN. $A \sim B$)

POZNÁMKA: Z PRAKTICKÝCH DÔVODOV SA OBMEZUJEME NA POUŽÍVANIE RIADKOVÝCH ÚPRAV

MODNOSŤ MATICE

MODNOSŤ MATICE A JE **POČET NEVULOVÝCH RIADKOV** MATICE A **UPRAVENEJ** POMOCOU EKVIVALENTNÝCH ÚPRAV NA **STUPŇOVITÝ** (TROJUHOLNÍKOVÝ, RESP. LICHOBZÉŤNÍKOVÝ) **TVAR**.
 V NEJ KAŽDÝ NASLEDUJÚCI RIADOK MUSÍ OBSAHOVAŤ ZĽAVA ASPOŇ 0 JEDNU NULU VIAC AKO PREDCHÁDZAJÚCI RIADOK (OZN. $h(A)$)

PRÍKLAD: URČME HODNOSTI MATÍC:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 18 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

HLAVNÁ DIAG. VZÁJOMNÁ VÝMENA RIADKOV

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 18 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(-4) \cdot \text{R}_1 + \text{R}_2, (-3) \cdot \text{R}_1 + \text{R}_3, (-2) \cdot \text{R}_1 + \text{R}_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 18 \\ 0 & -10 & 9 & -67 \\ 0 & -8 & 8 & -56 \\ 0 & -5 & 5 & -35 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\cdot (-\frac{1}{10}), \cdot (-\frac{1}{8}), \cdot (-\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 18 \\ 0 & 1 & -0.9 & 6.7 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{R}_3 - \text{R}_2, \text{R}_4 - \text{R}_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 18 \\ 0 & 1 & -0.9 & 6.7 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

NULOVÝ RIADOK

3 NEVULOVÉ RIADKY $\Rightarrow \text{h}(A) = 3$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(-1) \cdot \text{R}_1 + \text{R}_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(-1) \cdot \text{R}_2 + \text{R}_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{h}(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -8 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 6 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(-2) \cdot \text{R}_1 + \text{R}_2, (-1) \cdot \text{R}_1 + \text{R}_3, (-1) \cdot \text{R}_1 + \text{R}_4, (-2) \cdot \text{R}_1 + \text{R}_5} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -12 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(-1) \cdot \text{R}_2 + \text{R}_3, (-1) \cdot \text{R}_2 + \text{R}_4, (-1) \cdot \text{R}_2 + \text{R}_5} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{h}(C) = 2$

↓
ZATIAČ NEDODRŽANÁ STUPNOSŤ!

PRÍKLAD: AKO SI VYROBIT' V MATICI "1" NA VÝCHOVOM MIESTE

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(-2) \cdot \text{R}_1 + \text{R}_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

$\sim \dots$

ALEBO INAK

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3) \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 6 \\ 7 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \sim \dots$$

DETERMINANT

ŠTVOROCOVEJ MATICI A MÔŽEME PRIRADIŤ ČÍSLO, KTORÉ NAZÝVAME DETERMINANT MATICE (OZN. $\det A$ ALEBO $|A|$).

NECH JE DANÁ ŠTVOROCOVÁ MATICA A. SUBDETERMINANT (MINOR) D_{ij} VZHLÁDOM NA PRVOK a_{ij} MATICE A JE DETERMINANT MATICE, KTORÁ VYNECHANÍM i -TEHO RIADKU A j -TEHO STĺPCA MATICE A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow D_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ROZMER $n \times n$ ROZMER $(n-1) \times (n-1)$

VÝPOČET DETERMINANTU ROZMERU 2×2

- ROBIŤE TAK, ŽE OD SÚČINU PRVKOV NA HLAVNEJ DIAGONÁLE ODČÍTAME SÚČIN PRVKOV NA VEDĽAJŠEJ DIAGONÁLE

PRÍKLAD: VÝPOČÍTAME DETERMINANT MATICE $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-5) = -6 + 20 = \underline{\underline{14}}$$

VÝPOČET DETERMINANTU ROZMERU 3x3

- MÔŽEME VYUŽIŤ POMOCOU SARRUSOVHO PRAVIDLA

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME DETERMINANT MATICE

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [(0 \cdot 2 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 2) + (3 \cdot 3 \cdot (-3))] - [(3 \cdot 2 \cdot 2) + (0 \cdot 2 \cdot (-3)) + (1 \cdot 3 \cdot 1)] =$$

1. RIADOK → 0 3 2
2. RIADOK → 1 2 -3

$$= [4 - 27] - [12 + 3] = \underline{\underline{-38}}$$

POZNÁMKA: AK JE MATICA A JEDNOPRVKOVÁ, HODNOTA DETERMINANTU JE ROVNÁ PRAVE TOMU PRVKU.

$$A = (-2) \Rightarrow |A| = |-2| = -2$$

↪ NIE JE TO ABSOL. HODNOTA

VÝPOČET DETERMINANTU ROZMERU 4x4 A VIAC

- ROBÍME POMOCOU ROZVOJA DETERMINANTU PODĽA RIADKA ALEBO STĽPCA

1) ROZVOJ PODĽA i-TÉHO RIADKU

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \color{green}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \dots & \color{blue}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

2) ROZVOJ PODĽA j-TÉHO STĽPCA

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \color{blue}{a_{1j}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \color{blue}{a_{2j}} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \color{blue}{a_{nj}} & \vdots \end{vmatrix}$$

KDE A_{ij} - ALGEBRAICKÝ DOPLNOK PRVKU a_{ij} , PRE KTORÝ PLATÍ

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \quad ; \quad D_{ij} - \text{SUBDETERMINANT (MINOR) VZHLÁDOM NA PRVOK } a_{ij} \text{ MATICE } \underline{\underline{A}}$$

PRÍKLAD: VYPOČÍTAME DETERMINANT MATICE $A = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

RIADOK STĺPEC, KTORÉ BUDEME VYNECHÁVAŤ

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$\parallel$
30 $\parallel$
7

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$\parallel$
18

$= 0$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 30 + 4 \cdot 1 \cdot 7 + 0 + 5 \cdot 1 \cdot 18 = 88$$

POZNÁMKA: NÁJDEME RÝCHLEJŠÍ SPÔSOB VÝPOČTU - BUDEME VYTVARAŤ STĺPEC S ČO NAJVIÄŠÍM POČTOM NÚL. VYUŽIJEME PRÍTOM NIEKTORÉ EKVIVALENTNÉ ÚPRAVY MATÍC.

ALE AŽ NA ĎALŠEJ MODINE :)