

Matematika 1 – 4.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Limita funkcie

Zápis limity: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

Pri výpočte limity:

- a) dosadíme za neznáme x číslo a , ak **žiadna neurčitost'**, vypočítame limitu
- b) ak **neurčitost'**, limitu najprv upravíme tak, aby sme sa zbavili neurčitosti, až potom dopočítame limitu

Typy neurčitosti: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞

a)

Pr. 1 – 16 / 1: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$$

Pr. 2: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 4} \quad - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 4} = \frac{1^3 + 3 \cdot 1 + 5}{1^2 - 4} = \frac{9}{-3} = -3$$

b-1) dosadíme za neznáme x číslo a , ak **neurčitost'** $\frac{0}{0}$, urobíme rozklad na súčin koreňových činiteľov v čitateli aj v menovateli (ak v čitateli a menovateli **polynómy**)

Pr. 3 – 16 / 7:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x + 5}$$


Polynóm má všeobecný tvar:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pr. 4 – 16 / 3:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

4

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

Dú : 16 / 4, 8

b - 2) dosadíme za neznáme x číslo a , ak **neurčitost** $\frac{0}{0}$, rozšíříme vhodnou jednotkou (ak v čitateli alebo menovateli druhá odmocnina alebo v oboch, s použitím vzorca $a^2 - b^2$ upravíme tak, aby sme sa zbavili $\sqrt{\quad}$)

Pr. 5 – 17 / 17:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

Pomocou vzťahu $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ upravujeme menovateľa, aby sme sa zbavili druhej odmocniny a zároveň neurčitosti.

Pr. 6 – 16 / 14:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+0^2} - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{(a-b)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \stackrel{(a+b)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - 1^2}{x \cdot (\sqrt{1+x^2} + 1)} =$$

vhodná jednotka

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot (\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{0}{(\sqrt{1+0^2} + 1)} = 0$$

$\frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = 1$

Pomocou vzťahu $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ upravujeme čitateľa, aby sme sa zbavili druhej odmocniny a zároveň neurčitosti.

Dú : 16 / 11,12

b - 3) goniometrická funkcia, dosadíme, ak **neurčitost'** $\frac{0}{0}$, použijeme vzorec

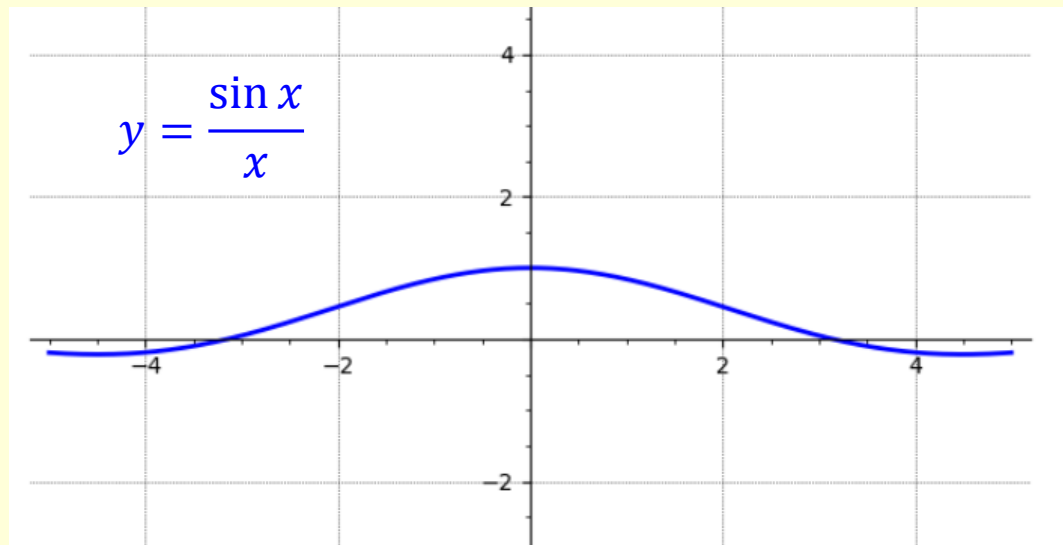
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{\otimes \rightarrow 0} \frac{\sin \otimes}{\otimes} = 1$$

$$\lim_{\star \rightarrow 0} \frac{\star}{\sin \star} = 1$$

Pr. 7 – 17 / 22:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$$



Pr. 8 – 17 / 19:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$$

5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x} \stackrel{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5.0}{0} = \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x \cdot \cos 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x \cdot \cos 5x} \frac{5}{5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \frac{5}{\cos 5x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{\cos 5x} = 1 \cdot \frac{5}{\cos 0} = 5$$

Dú : 17 / 20, 21

b - 4) dosadíme, ak **neurčitost'** $\frac{\infty}{\infty}$, delíme čitateľa aj menovateľa **najvyššou mocninou v menovateli** (ak v čitateli a menovateli **polynómy**)

Platí: $\infty \cdot \infty = \infty$, $-\infty \cdot -\infty = \infty$, $-\infty \cdot \infty = -\infty$, $c \cdot \infty = \infty$
 $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty + c = \infty$, $\sqrt{\infty} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ak $f(x)$ rastie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Ak $f(x)$ klesá:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

Pr. 9 – 17 / 29: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$$

Pr. 10 – 17 / 30: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x}{10x^2 - 3x + 1}$$

Pr. 11: Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + x + 1}{3x^2 + 1} \qquad \frac{-4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + x + 1}{3x^2 + 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-4x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-4 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{3 + \frac{1}{\infty}} = \frac{-4}{3}$$

najvyššia mocnina

Jednoduchšia verzia:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + x + 1}{3x^2 + 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-4x^2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{3} = \frac{-4}{3}$$

najvyššia mocnina

stačí deliť len prvé členy
polynómov najvyššou
mocninou v menovateli,
lebo ostatné členy budú 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3} \quad \text{Dú} \qquad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{3x - 1} \quad \text{Dú} \qquad \frac{2}{3}$$

b - 5) dosadíme, ak **neurčitost'** $\infty - \infty$, rozšíříme **vhodnou jednotkou** a potom delíme čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou v menovateli

Pr. 12:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x + 6} - \sqrt{x^2 - 3} \right)$$

Pr. 13 – 17 / 34:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x}) \quad 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x}) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2-x}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}} - \frac{2}{x} + \sqrt{\frac{x}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{\sqrt{1-0} + \sqrt{1}} = 0$$

najvyššia mocnina je $\sqrt{x}$

Dú : 17 / 35, 36

b - 6) dosadíme, ak **neurčitost** 1^∞ , použijeme jeden zo vzorcov

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{1}{x}\right)^x = e^{\pm 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k, \quad f(x) \rightarrow \infty$$

Pr. 14 – 22 / 21:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^x$$

