PRÍKLAD: VYPOČÍTAJME DETERMINANT MATICE A

VYBERIEME VHODNÝ STĹPEC, V KTOROM VYROBÍME POMOCOU ÚPRAVY „PRIČÍTANIE NENULOVÉHO NÁSOBKU NEJAKÉHO RIADKU K INÉMU RIADKU" NULY V DANOM STĹPCI A POMOCOU UPRAVENÉHO STĹPCA VYROBÍME ROZVOJ DETERMINANTU.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \curvearrowleft \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (2)(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \cdot (-1)^{4+3} \cdot}_{(-1)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} + \underbrace{0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \left| \text{ATĎ.} \right|}_{\text{NEPOTREBNÉ}} =$$

$$= -\left[(3\cdot4\cdot6)+(1\cdot6\cdot5)+(5\cdot0\cdot5)-(5\cdot4\cdot5)-(5\cdot6\cdot3)-(6\cdot0\cdot1)\right] = -\left[72+30-100-90\right] =$$
$$= -[-88] = 88$$

VPLYV MATICOVÝCH EKVIVALENTNÝCH ÚPRAV NA HODNOTU DETERMINANTU

1) ZMENA PORADIA RIADKOV (STĹPCOV) DETERMINANTU ZMENÍ ZNAMIENKO DETERMINANTU
2) VYNÁSOBENIE RIADKU (STĹPCA) NENULOVOU KONŠTANTOU k ZMENÍ HODNOTU DETERMINANTU k KRÁT
3) PRIPOČÍTANIE k-NÁSOBKU RIADKU (STĹPCA) K INÉMU RIADKU (STĹPCU) NEMENÍ HODNOTU DETERMINANTU

INVERZNÁ MATICA

NECH A JE REGULÁRNA MATICA ($|A| \neq 0$). POTOM K MATICI A VŽDY EXISTUJE MATICA A^{-1} A NAZÝVAME JU INVERZNÁ MATICA K MATICI A, PRIČOM PLATÍ:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad ; \quad E - \text{JEDNOTKOVÁ MATICA}$$

JEDEN ZO SPÔSOBOV HĽADANIA INVERZNEJ MATICE → POMOCOU ADJUNGOVANEJ MATICE $\text{adj}\, A$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}\, A = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$|A| \neq 0$

; A_{ij} = ALGEBRAICKÝ DOPLNOK PRVKU a_{ij}, PRIČOM PLATÍ

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$; PRIČOM

D_{ij} - SUBDETERMINANT VZHĽADOM NA PRVOK a_{ij}

PRÍKLAD: K MATICI $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ NÁJDIME INVERZNÚ MATICU.

OVERÍME, ČI INVERZNÁ MATICA EXISTUJE ($|A| \neq 0$)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 40+60+52-65-40-48 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

OVERENIE SPRÁVNOSTI: (NIE JE NUTNÉ)

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

3×3 · 3×3

PRÍKLAD: K MATICI $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ NÁJDIME INVERZNÚ MATICU.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |5| = 5 \qquad B_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |2| = -2$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |6| = -6 \qquad B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |3| = 3$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

SÚSTAVA LINEÁRNYCH ROVNÍC

SÚSTAVU
$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots + a_{mn}\cdot x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (*)$$

NAZÝVAME **SÚSTAVA LINEÁRNYCH ALGEBRAICKÝCH ROVNÍC.**
ČÍSLA $a_{11}, \dots, a_{mn}$ NAZÝVAME KOEFICIENTY SÚSTAVY,
$x_1, \dots, x_n$ NAZÝVAME NEZNÁME
ČÍSLA $b_1, \dots, b_m$ NAZÝVAME PRAVÉ STRANY ROVNÍC

SÚSTAVU PREPÍŠEME DO MATICOVÉHO TVARU

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

A (prvých n stĺpcov), $\bar{A}$ (celá rozšírená matica)

MATICU $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ NAZÝVAME **MATICA SÚSTAVY**

MATICU $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ NAZÝVAME **ROZŠÍRENÁ MATICA SÚSTAVY**

FROBENIOVA VETA (HOVORÍ O POČTE RIEŠENÍ SÚSTAVY)

SÚSTAVA (*) MÁ RIEŠENIE PRÁVE VTEDY, AK $h(A) = h(\bar{A})$.
V TOM PRÍPADE (POČET NEZNÁMYCH $= n$)
a) AK $h(A) = h(\bar{A}) = n$, TAK SÚSTAVA MÁ PRÁVE 1 RIEŠENIE
b) AK $h(A) = h(\bar{A}) < n$, TAK SÚSTAVA MÁ ∞ VEĽA RIEŠENÍ

AK $h(A) \neq h(\bar{A})$, TAK SÚSTAVA NEMÁ RIEŠENIE.

GAUSSOVA ELIMINAČNÁ METÓDA (GEM)

1) SÚSTAVU LINEÁRNYCH ROVNÍC PREPÍŠEME DO TVARU ROZŠÍRENEJ MATICE
2) POMOCOU EKVIVALENTNÝCH ÚPRAV JU UPRAVÍME NA STUPŇOVITÝ TVAR
3) NA ZÁKLADE FROBENIOVEJ VETY ROZHODNEME O POČTE RIEŠENÍ SÚSTAVY
4) VYJADRÍME RIEŠENIE, AK EXISTUJE

PRÍKLAD: POMOCOU GEM RIEŠME SÚSTAVY

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-2) \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (1) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ (-3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

A $\quad$ $\bar{A}$

$h(A) = 4$, $h(\bar{A}) = 4$, $n = 4$ } SÚSTAVA MÁ RIEŠ. } PRÁVE 1 RIEŠENIE

$-7x_4 = 7$ $\quad$ $-6x_3 - x_4 = -5$ $\quad$ $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ $\quad$ $x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1$

$x_4 = -1$ $\quad$ $-6x_3 + 1 = -5$ $\quad$ $x_2 + 1 - 1 = 0$ $\quad$ $x_1 + 0 + 5 - 2 = 1$

$x_3 = 1$ $\quad$ $x_2 = 0$ $\quad$ $x_1 = -2$

$$\bar{x} = (-2; 0; 1; -1)^T$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & -7 & 10 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -5 & 11 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -5 & 11 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (-3) \\ \\ (-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ (-2)\ (-7) \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 20 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (-5) \\ \swarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = 4$, $h(\bar{A}) = 4$ } SÚST. MÁ RIEŠ. } SÚST. MÁ PRÁVE 1 RIEŠENIE

$n = 4$

$-3x_4 = 4$

$x_4 = -\frac{4}{3}$

$x_3 + 2x_4 = -1$

$x_3 - \frac{8}{3} = -1$

$x_3 = \frac{5}{3}$

$x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$

$x_2 + \frac{5}{3} - \frac{8}{3} = 1$

$x_2 = 2$

$x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4$

$x_1 + 2 - \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = -4$

$x_1 = 0$

$$\bar{x} = \left(0 ; 2 ; \frac{5}{3} ; -\frac{4}{3}\right)^T$$

c) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & -3 & 2 & -5 \\ 6 & 10 & 0 & 9 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 7 & -1 & 7 & -2 \\ 7 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & -3 & 2 & -5 \\ 6 & 10 & 0 & 9 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (7)\ (-4)\ (6) \\ \swarrow \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 7 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 52 & -6 & 51 & -12 \\ 0 & -25 & 1 & -26 & 3 \\ 0 & 52 & -6 & 51 & -11 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (25) \\ (52) \\ \swarrow \end{matrix} \begin{matrix} (-1) \\ \swarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 7 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 52 & -6 & 51 & -12 \\ 0 & 0 & -98 & -77 & -144 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A, $\bar{A}$

$h(A) = 3$, $h(\bar{A}) = 4$ } $h(A) \neq h(\bar{A}) \Rightarrow$

SÚSTAVA NEMÁ RIEŠ.

d) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-2)\ (-3) \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ \swarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A, $\bar{A}$

$h(A) = 3$, $h(\bar{A}) = 3$, $n = 4$ } SÚSTAVA MÁ RIEŠ. } SÚSTAVA MÁ ∞ VEĽA RIEŠ.

$2x_3 + x_4 = 3$

NECH $x_3 = a$; $a \in \mathbb{R}$

$x_2 + 3x_3 = 3$

$x_2 + 3a = 3$

$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$

$x_1 + (3 - 3a) + 2a - (3 - 2a) = 2$

$2x_3 + x_4 = 3$

NECH $x_3 = a$; $a \in \mathbb{R}$

$2a + x_4 = 3$

$x_4 = 3 - 2a$

$x_2 + 3x_3 = 3$

$x_2 + 3a = 3$

$x_2 = 3 - 3a$

$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$

$x_1 + (3-3a) + 2a - (3-2a) = 2$

$x_1 + 3 - 3a + 2a - 3 + 2a = 2$

$x_1 = 2 - a$

$$\bar{x} = (2-a;\ 3-3a;\ a;\ 3-2a)^T;\ a \in \mathbb{R}$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-1) \\ (-3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -4 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (-2) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (11) \\ (-3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A $\quad$ $\bar{A}$

$h(A) = 3$
$h(\bar{A}) = 3$
$n = 5$

} SÚST. MÁ RIEŠ. } SÚST. MÁ ∞ VEĽA RIEŠ.

$x_5 = -34$

$-3x_3 - x_5 = -5$

$-3x_3 + 34 = -5$

$x_3 = 13$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3$

$3x_1 + 2x_2 + 52 + x_4 - 68 = 3$

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 19$

NECH $x_1 = a$

NECH $x_2 = b$

$3a + 2b + x_4 = 19$

$x_4 = 19 - 3a - 2b$

$$\bar{x} = (a;\ b;\ 13;\ 19-3a-2b;\ -34);\ a, b \in \mathbb{R}$$

CRAMEROVO PRAVIDLO

- POUŽITEĽNÉ IBA PRE SÚSTAVY S ROVNAKÝM POČTOM ROVNÍC A NEZNÁMYCH n
- POUŽITEĽNÉ IBA V PRÍPADE, ŽE SÚSTAVA MÁ PRÁVE 1 RIEŠENIE (MATICA SÚSTAVY JE REGULÁRNA, ČIŽE $|A| \neq 0$)
- K NÁJDENIU RIEŠENIA VYUŽÍVA DETERMINANTY

PRE $n = 2$:

MÁME SÚSTAVU ROVNÍC $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

OZNAČÍME $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$; $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$; $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

V DETERMINANTE D NAHRADÍME 1. STĹPEC STĹPCOM PRAVÝCH STRÁN

V DETERMINANTE D NAHRADÍME 2. STĹPEC STĹPCOM PRAVÝCH STRÁN

POTOM RIEŠENIE SÚSTAVY JE $\bar{x} = (x_1, x_2)^T$, KDE $x_1 = \frac{D_1}{D}$ A $x_2 = \frac{D_2}{D}$.

PRÍKLAD: POMOCOU CRAMEROVHO PRAVIDLA RIEŠME SÚSTAVU ROVNÍC

a) $2x_1 - 3x_2 = 7$
$-5x_1 + 2x_2 = -12$

$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$; $D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -12 & 2 \end{vmatrix} = -22$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -12 \end{vmatrix} = 11$; $x_1 = \frac{-22}{-11} = 2$; $x_2 = \frac{11}{-11} = -1$ $\Rightarrow \bar{x} = (2, -1)^T$

b) $x_1 - 3x_2 = 2$
$-2x_1 + 6x_2 = 3$

$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$! $\Rightarrow$ CRAMER SA NEDÁ POUŽIŤ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ GEM $\Rightarrow$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & 3 \end{array}\right)^{(2)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$ $\begin{matrix} h(A) = 1 \\ h(\bar{A}) = 2 \end{matrix}\Big\}$ SÚST. NEMÁ RIEŠ.

PRE $n = 3$:

MÁME SÚSTAVU ROVNÍC $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

OZNAČÍME $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$; $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

POTOM RIEŠENIE SÚSTAVY JE $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$; KDE $x_1 = \frac{D_1}{D}$; $x_2 = \frac{D_2}{D}$; $x_3 = \frac{D_3}{D}$

PRÍKLAD: POMOCOU CRAMEROVHO PRAVIDLA RIEŠME SÚSTAVU ROVNÍC

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 - 3 - 6 + 2 - 2 = -18 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - 32 - 1 - 2 + 14 - 8 = -36 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-36}{-18} = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 4 + 21 - 48 + 14 - 1 = -18 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-18}{-18} = 1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 28 - 24 - 21 + 16 + 2 = -54 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{-54}{-18} = 3$$

$$\bar{x} = (2, 1, 3)^T$$