

DIFERENCIÁLNE ROVNICE (DR)

P1



Káva v čase $t=0$... 90°C (tepota) FYZ. ZÁKON
 $T=20^{\circ}\text{C}$ INDOOR
 $t=1\text{min}$... 80°C
 $t=?$... $y(t)$ v $^{\circ}\text{C}$

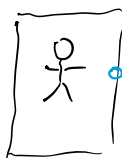
P2



POZOROVANIE
 Rohom isť obdobie rastie tak, že rychlosť rastu je nepriamo úmerná jeho výške
 v čase $t=0$... 25m
 $t=3\text{roky}$... 3m
 $t=?$... $y(t)$ v m

P3

TURÍNSKE ZLÁTNÚ



JEŽIS

PRE

PROTI

mieru
 veľkosť na
 prvej poľovni

chyba deformácia

OXFORD, ZÜRICH, TUCSON 1988

ukáľkovaní malodlou - veľkosť

rozpad
 $\rightarrow C^{14}$
 $\rightarrow C^{12}$
 stály
 oľby a žijúciach org.

DR sú rovnice, ktoré obsahujú deriváciu (cie)
 nerônný faie

Príse.

$$y'(x) + x y(x) = 0$$

↑ DR 1. rádu

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \sin x$$

↑ DR 2. rádu

$$y'(x) + \sin x = 0$$

↑ DR 1. rádu

Rád DR - rád najvyššej derivácie

Riešiť DR znamená nájsť všetky faie, ktoré na nejakom intervale splňujú danú DR

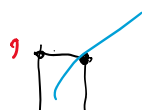
Pr. Riešte DR: $y'(x) = x^2 - 1$ | ∫ prvá der., zleďme pôvodnú faie

$$y(x) = \int x^2 - 1 dx = \frac{x^3}{3} - x + C$$

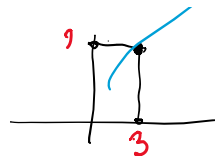
DR sporidlo riešenie integrování,
 dáta DR majú so-vela riešení
 (VPLYV INT. KONST. C)

mešedý sú dané dodatočné podmienky,
 ktoré umožnia nájsť práve 1 riešenie

Pr. Riešte DR: $y'(x) = x^2 - 1$, ak $y(3) = 2$



Pr. Rieš DR: $y'(x) = x^2 - 1$, ak $y(3) = 2$



$x=2$

$$y(x) = \frac{x^3}{3} - x + C$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x - 4$$

$$2 = y(3) = \frac{3^3}{3} - 3 + C \Rightarrow C = -4$$

DR - I. rodu $\rightarrow$ separovateľná DR
 $\rightarrow$ lineárna DR

Sep. DR je DR, ktorá môže upraviť na tvar

(1) $f(y) y' = g(x)$ / $\int$ / separovať = oddeliť premenné

$$\int f(y(x)) y'(x) dx = \int g(x) dx$$

označí
 $G' = g$
 $F' = f$

$$y(x) = u \Rightarrow y'(x) dx = du$$

$$\int f(u) du = \int g(x) dx$$

$$F(u) = G(x) + C$$

f, g sú spoj $\Rightarrow \exists$ primitívne fce

$$\frac{2}{3}x^3 - 3y = x + C$$

(2) $F(y(x)) = G(x) + C$

to je riešenie DR v IMPLICITNÝ TVAR

riešady

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C)$$

nes. v EXPLICITNÝ TVAR

Riešenie

$$f(y) y' = g(x)$$

možeme jednoducho rozlúť /
 akorát použijeme v príkladoch

SKRÁTENÁ PESTA

$$F(y) = G(x) + C$$

$$\begin{aligned} f(y) \frac{dy}{dx} &= g(x) \\ f(y) dy &= g(x) dx \quad / \int \\ \int f(y) dy &= \int g(x) dx \\ F(y) &= G(x) + C \end{aligned}$$

U
A
S
P
O
S
T
V
P
g(1)
k
o
2)

Príklad Rieš DR

$$y' = x y^2$$

ak

$$y(0) = 1$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$dy \dots$$

$$m \pm n$$

$$y' = x y \quad \text{--- } \int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x y \quad \boxed{y \neq 0}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{rieš v IMPL. TVAR}$$

EXP TVAR

$$y(x) = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} + C}$$

$y=0$ je tiež rieš (dostatoč do DR)
 $\hookrightarrow y(0)=1 \quad x \in \mathbb{R}$

$$x=0$$

$$1 = -\frac{1}{C} \Rightarrow C = -1$$

$$y(x) = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} - 1} = \frac{2}{2 - x^2}$$

INTERVALY NA KTORÝCH EXIST. RIŠ
 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$
 NAŠ INT.

$$x \neq \pm \sqrt{2}$$

PRAKTICKÉ ÚLOHY

ĎALŠÍ VÝZNAM DERIVÁCIE

- $y(t)$
 - počet ľudí + čas t
 - počet radiológ. aparátov v čase t *
- $\bar{c}(t)$
 - cena tovaru v čase
 - rychlost rozliay *
 - teplost prechodu *

$y(t)$ -- počet ľudí roba časový interval

$$\langle t, t+h \rangle$$

$$\begin{matrix} 2024 & 2026 \\ y(2024) & y(2026) \\ 1000 & 1200 \end{matrix}$$

za 2 roky pribudlo 200 ľudí
 alebo priemernou rýchlosťou pribudli
 ľudia počet/rok

$$v_p = \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

$$\left(= \frac{1200 - 1000}{2} = \frac{200}{2} = 100 \right)$$

obmedzená rýchlosť

$$v_f = \lim_{h \rightarrow 0} v_p = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = y'(t)$$

čím je časový úsek menší

$$\text{dý} \quad v_0 \approx v_p$$

STAČÍ NA
 ZOSTAVENIE DR

↓
 zmena
 rýchlosti zmeny fcie

obomérá nýchlost

$$v_g = \lim_{h \rightarrow 0} v_p = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x)$$

čím je časový úsek menší
dýn $v_0 \approx v_p$

STACÍ NA
ZOSTAVENIE DR

↓
kmena
nychlost smery fcie



babka upieva vianočný zloč-
yberie z rúry, koláč veľmi horúci
múčka chce ochutnať

babkin šg. rožon

nýchlost ochladzovania je priamo úmerná? čo robí babka?

rozdiel (tepota predmetu - tepota prostredia) $\hookrightarrow$ yba zloč na babkin
tepota zloč - prostredia

$y(t)$ - tepota šg. a čas t

$$T = 20^\circ$$

nýchlost smery tepoty

$$y'(t) = -k(y(t) - T)$$

$k > 0$

DR na ochladzovanie FYZ. zákon

$$\int \frac{dy}{y-T} = \int -k dt$$

$$y(0) = 90^\circ$$

$$y(1) = 30^\circ$$

$$y(t) = T + e^{-kt}$$

Máme 2 rovnice k, c
preto boli 2 merania

$$\ln(y-T) = -kt + C_1$$

$$y(t) - T = e^{-kt+C_1} = e^{-kt} \cdot e^{C_1} = C e^{-kt}$$

$$C = e^{C_1}$$

$$t: t=0$$

$$90 = 20 + C \Rightarrow C = 70$$

$$t=1$$

$$30 = 20 + 70 e^{-k} \Rightarrow \left(\frac{e^{-k}}{70} \right) = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$y(t) = T + C(e^{-k})^t$$

$$y(t) = 20 + 70 \left(\frac{1}{7} \right)^t$$

$$y(4) = \dots$$

T_0 k napr. e^{-k} - mó

k - so môžeme pre rôzne šg. merať

k - VPLYV PROSTREDIA



LDR 1. rodu

je DR tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)$$

de $a(x), b(x)$ sú
domé fcie
(sú spojité na I)

Podľa c. 1 integruj

Poznámka 1.1 integrál

domi fce
(sú spojité na I)
rišenie existuje na celom I

$$y(x) + \int a(x) y(x) dx = \int b(x) dx$$

!
 neformálne

iná cesta:

→ uprosťovanie rovnice fciou L'S DR uprosťovanie a deriváciu ničinnu

INTEGRAČNÝ FAKTOR IF

$$IF = e^{\int a(x) dx}$$

derivate c=0, lebo pohľadáme jeden IF
ind. bod

Dosadením

$$y(x) e^{\int a(x) dx} + a(x) e^{\int a(x) dx} y(x) = b(x) e^{\int a(x) dx}$$

TRICK

OK

$$(y(x) e^{\int a(x) dx})' = b(x) e^{\int a(x) dx} \quad | \int$$

$$y(x) e^{\int a(x) dx} = \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + C$$

$$\int e^{\int a(x) dx}$$

$$y(x) = \left[\int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + C \right] e^{-\int a(x) dx}$$

VZOREC pre Riešenie DR

STAČÍ SI PAMÄTAŤ POSTUP

Pr: Riešte DR

$$y' - \frac{1}{x} y = 2x$$

a(x) b(x)

$$\frac{1}{x}$$

$$(-\infty, 0) \quad | \quad (0, \infty)$$

du riešime

12.02

$$IF = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 2$$

derivácia TRICK

$$\left(\frac{1}{x} y \right)' = 2 \quad | \int$$

$$(IF \cdot y)'$$

$$\frac{1}{x} y = 2x + C$$

147. TVOR

$$y = 2x^2 + Cx$$

rišenie riš.

$$a2 \quad y(1) = 1$$

$$1 \in (0, \infty)$$

x=1

$$1 = 2 + C \Rightarrow C = -1$$

konkrétne
partikulárne

$$y = 2x^2 - x$$



1-1-1

nombre
partielle

$$y = 2x^2 - x$$