DIF. ROV. – 1. RÁD – APLIKÁCIE



$y'(t) = -k(y(t) - T)$ FYZ. ZÁKON



$y(t)$ výška stromu v m po t rokoch

$y(0) = 0{,}5\,m$

$y(3) = 1\,m$

$y(t) = ?$

Rýchlosť rastu = priamo úmerne výške $t \in \langle 0, k \rangle$ POZOROVANIE

" menej výše

$$y'(t) = \frac{k_1}{y(t)} \quad \text{sep. DR}$$

$$\int y\,dy = \int k\,dt \Rightarrow \frac{y^2}{2} = k_1 t + c_1$$

$y^2(t) = kt + c$ $\quad t=0 \Rightarrow (0{,}5)^2 = c \Rightarrow c = 0{,}25$

$t=3 \Rightarrow 1 = 3k + 0{,}25 \Rightarrow k = \frac{0{,}75}{3} = 0{,}25$

$$y(t) = \sqrt{0{,}25t + 0{,}25} = \frac{1}{2}\sqrt{t+1}$$

TURINSKE PLATNO

$y(t)$ – množstvo rádioakt. látky

MATEM. PREPIS

RÝCHLOSŤ ZMENY $y(t)$ = RÝCHLOSŤ ROZPADU

FYZ. ZÁKON: Počet rozpadnutých atómov (za jednotku času) je priamo úmerný počtu atómov vo vzorke

$y'(t) = -k\,y(t)$, $k > 0$ sep. DR

$$\int \frac{dy}{y} = -\int k\,dt \qquad \ln y = -kt + c_1$$

$$y(t) = e^{-kt+c_1} = e^{-kt} e^{c_1} = c\,e^{-kt}$$

Označme $y(0) = y_0$ → rač. množstvo látky

$t=0$ $\quad y_0 = c\,e^0 \Rightarrow c = y_0$

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{-kt}}$$

POLČAS ROZPADU = T – doba za ktorú sa rozpadne polovica látky

$k = \frac{\ln 2}{T}$

C^{14} $\quad T = 5730$ rokov

$$y(T) = \frac{y_0}{2}$$

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kT}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -kT \Rightarrow k = \frac{-\ln(1/2)}{T} = \frac{\ln 2}{T}$$

Vo vzorke z TURINSKÉHO PLÁTNA je 92% C^{14} oproti žijúcim org.

$t=0$ ... vznik

t^* – súčasný stav $\quad y(t^*) = 0{,}92\,y_0$

y_0 – pôvodná hodnota C^{14}

$y(t) = y_0 e^{-kt}$

$t = t^*$ $\quad y(t^*) = y_0 e^{-kt^*}$ $\quad \ln 0{,}92 = -k t^*$ 1988

$t = t^*$

$y(t) = y_0 e^{-kt}$

$0{,}92 y_0 = y_0 e^{-kt^*} \Rightarrow \ln 0{,}92 = -k t^*$

$t^* = -\frac{\ln 0{,}92}{k} = \frac{-\ln 0{,}92}{\ln 2} T \approx \frac{1}{20}$

1988
- 720
1268

LDR – 2. rádu

(N) $y''(x) + p(x) y'(x) + q(x) y(x) = f(x)$ nehomogénna

(H) $y''(x) + p(x) y'(x) + q(x) y(x) = 0$

na vyriešenie (N) treba najprv vyriešiť (H).

ZÁKL. VLASTNOSTI

V1. Riešenie existuje na intervale spojitosti koeficientov

V2. Ak $y_1(x), y_2(x)$ sú obe riešenia (H) tak aj $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ je rieš (H)

V3. Na vyriešenie (H) treba nájsť 2 Lin. Nez funk. $y_1(x), y_2(x)$

LN pre 2 fcie znamená, že jedna funkcia nie je násobkom druhej

Test WRONSKIAN $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ $= 0$ na I $\Rightarrow$ $y_1(x), y_2(x)$ sú LZ; $\neq 0$ na I $\Rightarrow$ $y_1(x), y_2(x)$ sú LN

Použitie testu

$y_1(x) = \sin x$ $y_2(x) = \cos x$ sú riešenia DR $y''(x) + y(x) = 0$

OTESTUJTE LZ/LN

$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$ sú LN

EŠTE RAZ

$y_1(x) = e^{2x}$
$y_2(x) = e^{3x}$ sú riešenia DR $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$

Test LZ/LN $W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{2x} \cdot e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0 \Rightarrow$ LN

Veta (o riešení (H)) Nech $y_1(x), y_2(x)$ sú LN riešenia (H). Potom každé ďalšie riešenie $y(x)$ sa dá vyjadriť

$y(x) = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}_{\text{všeobecné riešenie}}$

$y_1(x), y_2(x)$ FUNDAMENT. SYS.

Pri LDR 1. rádu bola 1 bázová c

LDR 2. rádu sú 2 bázové.

Veta hovorí, že na riešenie (H) treba nájsť 2 LN riešenia ! 2 AKO ?

Vele koreňí sú ne riešenie (H) treba nájsť 2 LN riešenie ? 2 AKO ?

Pr. Rieš DR $y''(x) + y(x) = 0$

Vieme $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ sú LN rieš

$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

pričom c_1, c_2 dostávam jednotlivé riešenie

až pridám poč. podmienky

$y(0) = 1$
$y'(0) = 0$

$\Rightarrow$ vypočítame príslušné c_1, c_2 a dostaneme konkrétne PARTIKULÁRNE RIEŠENIE

$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$

$1 = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0$ (0, 1)

$0 = c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0$

ÚVAHY VEDÚCE K RIEŠENIU (N)

(N) $y''(x) + p(x) y'(x) + q(x) y(x) = f(x)$

Predpokladajme, že $\varphi(x)$ je riešenie dej. rovnice t.j. $\varphi'' + p\varphi' + q\varphi = f$

nech $y(x)$ je nejaké ďalšie rieš (N)

Skúsim pomocnú funkciu $z(x) = y(x) - \varphi(x)$ a počítajme

$$0 = z'' + p(x) z' + q(x) z = (y''(x) - \varphi''(x)) + p(x)(y'(x) - \varphi'(x)) + q(x)(y(x) - \varphi(x))$$
$$= y'' + py' + qy - (\varphi'' + p\varphi' + q\varphi) = f(x) - f(x) = 0$$

to moje z je rieš (H) a teda podľa vety o riešení (H)

aj $y_1(x), y_2(x)$ sú rieš (H) a sú LN tak

$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

$y(x) - \varphi(x)$ (H)

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \varphi(x)$ (N)

$c_1 y_1 + c_2 y_2$ ... všeob. rieš (H)

$\varphi(x)$ ... part. rieš (N)

všeob. rieš (N)

Veta (o riešení (N))

Nech $y_1(x), y_2(x)$ sú LN rieš (H)
Nech $\varphi(x)$ je rieš (N)

} Potom každé ďalšie rieš $y(x)$ (N) sa dá vyjadriť

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \varphi(x)$

K vyriešeniu (N) treba najprv vyriešiť (H)

LDR (H) s konšt. koef.

(H) $a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$ $\quad a, b, c \in R$

LDR (H) s konšt. koef.

(H) $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0$ $\quad p, q \in \mathbb{R}$

V teórii — vedeli nájsť 2 LN riešenia

Z AKO?

Z tvaru (H) vyplýva $y(x) \approx y'(x)$

Ktorá fcia sa derivovaním málo zmení

TIPNEME SI

$y = \operatorname{arctg} x \quad y' = \frac{1}{1+x^2} \quad y'' =$

$e^x \quad e^{2x} \quad \dots \quad y(x) = e^{\lambda x}$ λ - parameter

keďže $e^{\lambda x}$ je riešením (H) OVERÍME DOSADENÍM

$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0 \quad / : e^{\lambda x}$

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ CHARAKTERISTICKÁ ROVNICA

Funkcia $e^{\lambda x}$ je riešením (H) vtedy a len vtedy ak λ je koreň CHR

P1. Riešte DR $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$

1. KROK CHR $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow e^{2x}$ už sme dokázali, že sú LN

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow e^{3x}$

$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}$

CHR $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

I. máme 2 rôzne reál. korene λ_1, λ_2 (ako v príklade)

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ všeob. rieš.

II. máme λ_1 dvojnásobný koreň CHR $\quad (\lambda - \lambda_1)^2 = 0$

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ MÁME

$y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$ DRUHÉ RIEŠ

ak by sme mali LDR 3. rádu a λ_1 by bolo dvojnás. koreň CHR tak $y_3(x) = x^2 e^{\lambda_1 x}$, ...

Rieš. DR $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$

1. CHR $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \quad \rightarrow \quad y_1 = e^x$

$y_2 = x e^x$

$y = x e^x$

$y' = e^x + x e^x$

$y'' = e^x + e^x + x e^x$

overíme

$(2e^x + x e^x) - 2(e^x + x e^x) + x e^x = 0$

O.k

všeob. rieš $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$

$(2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0$

O.K

všeob. rieš $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$

III CHR má komplex. korene $\lambda = a \pm ib$, $b \neq 0$

Keďže nikde sme nepoužili, že b je reálne číslo.

Máme riešenie $y(x) = e^{(a+ib)t} = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$

KOMP FCIA EUL.

$= \underbrace{e^{at} \cos bt}_{y_1} + i \underbrace{e^{at} \sin bt}_{y_2}$

všeob. rieš je $y = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt$

(N) $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = f(x)$ $p, q \in R$

$y'' + 2y' + 2y = \underbrace{x^2 + x + 1}_{\text{polynóm}}$ $\varphi(x)$

$\varphi(x) = \sin x$ nemá zmysel

TIP $\varphi(x) = Ax^2 + Bx + C$

$\varphi'(x) = 2Ax + B$

$\varphi'' = 2A$

$2A + 4Ax + 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2 + x + 1$

x^2: $2A = 1 \Rightarrow A = 1/2$

x: $4A + 2B = 1$

x^0: $2A + 2B + 2C = 1$

Riešenie $\varphi(x)$ hľadáme v takom tvare v akom je PS (v)

I ak $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \Rightarrow \varphi(x) = Q_n(x) e^{\alpha x} x^s$,

kde α je s-násobný koreň CHR

MOŽNOSTI α nie je koreň CHR ... $s = 0$

α je 1 nás. CHR ... $s = 1$

α je 2 nás. CHR ... $s = 2$

II ak $f(x) = e^{\alpha x}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$ α, β, A, B sú dané

$\Rightarrow \varphi(x) = e^{\alpha x}[C \cos \beta x + D \sin \beta x] x^s$, kde $\alpha \pm i\beta$ je s nás. koreň CHR

α nie je koreň $s = 0$

α 1-nás $s = 1$

Rieste DR

$2x$ $f(x) = P_n(x) \cdot e^{2x}$

Řešte DR

$$y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x} \qquad f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

1. $y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow$ $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$ ... dvě řešení

$\varphi(x) = A e^{2x} x^s$

$\varphi(x) = A x e^{2x}$

2 je zároveň 1 násobný kořen CHR $\Rightarrow s = 1$

nehomogenní složka řešení. A najdeme dosazením do (N)

$\vdots \; A = -5$

2. $y'' - 5y' + 6y = 40 \cos 3x + 0 \sin 3x$ | $\alpha = 0$, $\beta = 3$; $A = 40$, $B = 0$

$\varphi(x) = (C \cos 3x + D \sin 3x) x^s$

$\alpha + i\beta = 3i$ není kořen

$s = 0$

$\varphi(x) = C \cos 3x + D \sin 3x$

φ'

φ''

$C = -1 \qquad D = -5$