

Derivácia funkcie

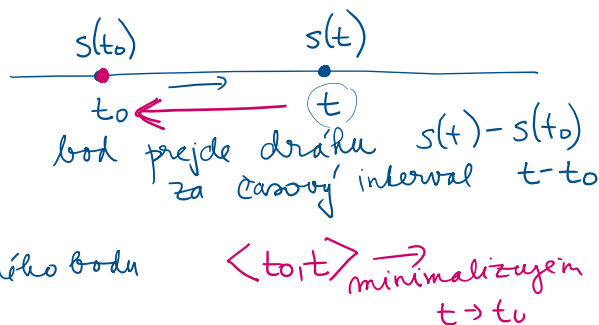
pondelok 12. októbra 2026 11:36

príklad ① fyzika
majme pohyb hmotného bodu po priamke

vytvorím podiel

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \text{rychlosť}$$

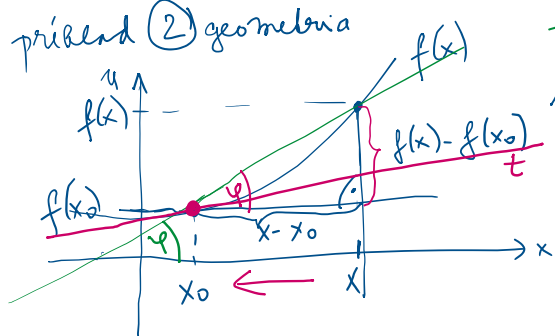
premenna
pohybu hmotného bodu



ak $t \rightarrow t_0$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \text{okamžitá rýchlosť}$$

príklad ② geometria



priamka prechádzajúca bodmi $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$
určíme smernicu priamky $k = \tan \varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

čo sa stane s priamkou ak $x \rightarrow x_0$
stane sa dotyčnicou
teda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{smernica}$$

dotyčnice
ku grafu
 $f(x)$ v bode
 $[x_0, f(x_0)]$

DEFINÍCIA

Definícia

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu, ak je definovaná v okolí bodu x_0 a existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Túto limitu nazývame deriváciou funkcie f v bode x_0 a označujeme ju $f'(x_0)$.

pre $x = x_0 + h$ dostávame zápis limity v tvare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Iné spôsoby označenia derivácie: $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x=x_0}$



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pozn. $f(x)$ musí byť definovaná na $O(x_0)$.
vlastná limita, ak hovorím o derivácii.

zápis: $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$

alternatívny zápis limity (pre potreby dokazov)

ak $x - x_0 = h$
ak $x \rightarrow x_0$, tak $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

príklad. $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f) = (0, \infty)$

vezmem ľub. $x_0 \in D(f)$ a idem
príklad $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

pre ľubovoľné $x_0 \in D(f) - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt{x} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

derivácia v bode je ČÍSLO

derivácia funkcie na množine je opäť funkcia

↑
výpočet derivácie

vypočít derivácie pomocou definície :-)

naučme sa „sikovnejšie“ počítať derivácie funkcií :-)

derivácia v bode je (číslo)

derivácia funkcie na množine je opäť funkcia ($D(f)$) (niekde definovaná)

Jednostranné derivácie

Definícia

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ deriváciu zľava (sprava), ak je definovaná v istom okolí bodu x_0 a existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

Túto limitu označujeme $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$).

Veta

Funkcia f má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, ak má v bode x_0 deriváciu zľava aj sprava a platí

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

derivácia zľava v bode x_0

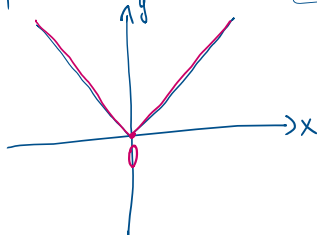
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

derivácia sprava v bode x_0

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

! $\leftarrow$ vyplýva zo zvláštnosti limit

príklad: $f(x) = |x|$



vynárajme jednostranné derivácie v bode $x_0 = 0$

$$f'_-(x_0=0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

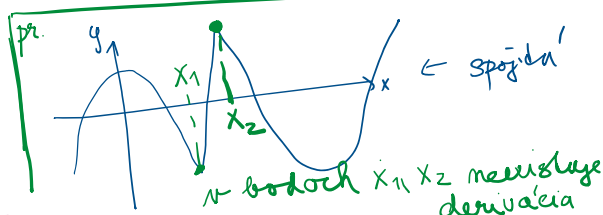
$$f'_+(x_0=0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

dostali sme

$$f'_-(0) = -1$$

$$f'_+(0) = 1$$

pytam sa $f'(0)$ neexistuje!



IZŤAH SPOJITOSTI A DERIVÁCIA FUNKCIE

(VETA) Ak má funkcia deriváciu v bode x_0 , tak je v bode x_0 spojitá.

dôkaz:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ reálna}$$

chcem ukázať $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ spojitá v bode x_0

pridáme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ keď je spojita
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ keď existuje vlastná, lebo existuje $f'(x_0)$

2. platí to aj naopak? $\rightarrow$ NIE! (vid' príklad $f(x) = |x|$)

Pravidlá pre výpočet derivácie funkcie

Veta

Nech funkcie f a g majú derivácie na otvorenom intervale I , nech $c \in \mathbb{R}$. Potom funkcie cf , $f+g$, fg majú derivácie na I a $\frac{f}{g}$, $\frac{f}{g}$ majú derivácie na $I - \{x \in I : g(x) = 0\}$, pričom platí:

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ ← pomocné pre dôkaz podielu
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \leftarrow \text{dôkaz o lýždeň}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Derivácia zloženej funkcie

Veta

Nech $g : I \rightarrow J$ má deriváciu na otvorenom intervale I . Nech $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ má deriváciu na otvorenom intervale J . Potom funkcia $f(g(x))$ má deriváciu na I a platí

$$[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

dôkaz:

ľub. $x_0 \in I$

$$\left[f(g(x))\right]' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot g'(x) =$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{def. derivácie}$$

nech $g(x_0) = u_0$
 $g(x) = u$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g'(x) - g'(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$$

dobali sme

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivácia inverznej funkcie

← potrebujeme k dôkazom (pre príklady NIE)

Veta

Nech $f: I \rightarrow J$ je rýdzomonotónna funkcia na otvorenom intervale I , nech f^{-1} je inverzná funkcia k funkcii f . Ak $f'(x) \neq 0$ na I , tak funkcia f^{-1} má deriváciu na J a platí

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Derivácie elementárnych funkcií

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arctg x]' = \frac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$

! ← potrebujeme k príkladom

pravidlá

$$\begin{cases} [f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{cases}$$

! niektoré dôkazy nabúda!

$$[\text{konštanta}]' = 0$$

príklad:

1) $f(x) = x^3$

2) $f(x) = 3x^3$

3) $[g^x]' = g^x \cdot \ln g$

4) $[\log_7 x]' = \frac{1}{x \cdot \ln 7}$

$$f'(x) = [x^3]' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

$$[3x^3]' = 3 \cdot [x^3]' = 9x^2$$