

Matematika 3 – 4.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

1. NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ RADY (NČR)

1.3 Kritéria konvergence radu

Cauchyho integrálne kritérium

Nech pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ existuje spojitá funkcia $f(x)$ nerastúca na $\langle K, \infty \rangle$ a nech pre každé $n \geq K$: $f(n) = |a_n|$

Ak

1. $\int_K^{\infty} f(x)dx < \infty$, tak je rad **absolútne konvergentný**.

2. $\int_K^{\infty} f(x)dx = \infty$, tak je rad **divergentný**.

Úprava **nevlastného integrálu** pomocou vzťahu $\int_K^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_K^a f(x)dx$

Leibnizovo kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je rad so striedavými znamienkami. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

je nerastúca. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný práve vtedy, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Odhad súčtu rádu: $|s_n - s| < a_{n+1}$

Použitie: rad, kde je (-1) umocnená na výraz s n

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} (2n)}{3n-1}$$

Pr. 1 – 24 / 131: Určte konvergenciu NČR:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2 - 2}}$$

diverguje

Cauchyho integrálne kritérium – viac pozri príklad 2

Pr. 2: Určte konvergenciu NČR:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Použijeme **Cauchyho integrálne kritérium**, pre daný rad hľadáme funkciu, ktorá bude spojitá a nerastúca na intervale $\langle K, \infty \rangle$, ktorej konvergenciu budeme riešiť, ak bude funkcia konvergentná bude aj rad konvergentný

1. Zvolíme funkciu $f(x)$ - dostaneme ju z predpisu pre rad, kde n nahradíme x : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
2. Overíme, že funkcia je spojitá a nerastúca na intervale $\langle K, \infty \rangle$ – funkcia je spojitá v bodoch, kde je definovaná, určíme jej definičný obor, v našom prípade je interval $\langle K, \infty \rangle$ daný hranicami radu (n od 1 do ∞) teda $\langle 1, \infty \rangle$
 - a) podmienka pre $D(f)$: $x^2 + 1 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq -1 \rightarrow D(f) = R \rightarrow$ funkcia je spojitá aj na $\langle 1, \infty \rangle$
 - b) funkcia je nerastúca na danom intervale, ak $f'(x) < 0$

$$f'(x) = \frac{-1.2x}{(x^2 + 1)^2} < 0 \text{ pre všetky } x \text{ z } D(f) \text{ to platí} \rightarrow \text{funkcia je nerastúca na } \langle 1, \infty \rangle$$

3. Položíme $|a_n| = f(n)$ pre každé $n \geq K$

$$|a_n| = f(n) = \frac{1}{n^2 + 1} \text{ pre každé } n \geq 1$$

4. Overíme konvergenciu funkcie – počítame nevlastný integrál

$$\int_K^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} [\operatorname{arctg} x]_1^a$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} 1) = \operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4} < \infty \rightarrow \text{konverguje} \rightarrow \textbf{konverguje aj rad}$$

Pr. 3: Určte konvergenciu NČR a urobte odhad súčtu radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-1}$$

Je to **rad so striedavými znamienkami**, použijeme **Leibnizovo kritérium**

1. Určíme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - porovnáme predpis radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n-1}$ zo všeobecným predpisom pre rad so striedavými znamienkami $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{4n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

2. Overíme, že postupnosť je nerastúca - postupnosť je nerastúca, ak platí $a_n > a_{n+1}$

pri overovaní postupujeme nasledovne:

pre každé x z $D(f)$ platí: $n < n+1$ /4 stále začíname týmto krokom

$$4n < 4(n+1) \quad /-1$$

$4n-1 < 4(n+1)-1$ upravujeme, kým nedostaneme a_n na ľavej strane

$$\frac{1}{4n-1} > \frac{1}{4n+3} \rightarrow a_n > a_{n+1} \rightarrow \text{postupnosť je nerastúca}$$

Poznámka: $n < n+1$ ale $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

3. Zistíme konvergenciu radu pomocou limity $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n - 1} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow \text{rad so striedavými znamienkami } \mathbf{konverguje}$$

Poznámka: ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \rightarrow$ rad so striedavými znamienkami **diverguje**

4. Určíme odhad súčtu radu $|s_n - s| < a_{n+1}$

$$|s_3 - s| < a_4$$

$$s_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} = \frac{-65}{231} = -0,28$$

$$a_4 = \frac{1}{15} = 0,6\bar{7}$$

Odhad súčtu radu pomocou s_3 sa od skutočného súčtu s líši o $0,6\bar{7}$.

Pr. 4: Určte konvergenciu NČR:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Je to **rad so striedavými znamienkami**, použijeme **Leibnizovo kritérium**

Pr. 5 – 25 / 143: – Určte konvergenciu NČR:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \text{ diverguje}$$

Je to **rad so striedavými znamienkami**, použijeme **Leibnizovo kritérium**

$$\textit{pomôcka: } a_n = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Pr. 6 – 25 / 145: – Určte konvergenciu NČR:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ konverguje}$$

Je to **rad so striedavými znamienkami**, použijeme **Leibnizovo kritérium**

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

pre každé x z $D(f)$ platí: $n < n+1 \quad / \cdot 2$

$$2n < 2(n+1) \quad / -1$$

$$2n-1 < 2(n+1)-1$$

$$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1} \rightarrow a_n > a_{n+1} \rightarrow \text{postupnosť je nerastúca}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow \text{rad so striedavými znamienkami konverguje}$$

Dú: 24 / 125, 128, 130, 135, 25 / 141, 142, 144, 147