

Matematika 3 – 5.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

1. NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ RADY (NČR)

2. Mocninový rad

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - a)^n$ nazývame **mocninový rad** so stredom v bode a .

Pre každý mocninový rad nastáva jeden z prípadov:

- rad **konverguje** len v bode $x = a \rightarrow \rho = 0$,
- rad **konverguje** pre $\forall x \in R \rightarrow \rho = \infty$,
- $\exists \rho > 0$, že na intervale $(a - \rho; a + \rho)$ daný rad **konverguje**
a na množine $R/(a - \rho; a + \rho)$ daný rad **diverguje**.

ρ - **polomer konvergencie**

$(a - \rho; a + \rho)$ - **interval konvergencie IK**

$\langle a - \rho; a + \rho \rangle, \langle a - \rho, a + \rho \rangle, (a - \rho, a + \rho)$ - **obor konvergencie OK** (dostaneme z IK, keď vyšetríme konvergenciu v krajných bodoch intervalu)

Ak existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ alebo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ tak pre polomer konvergenzie MR:

- $\rho = \frac{1}{\lambda}$ pre $0 < \lambda < \infty$
- $\rho = 0$ pre $\lambda = \infty$
- $\rho = \infty$ pre $\lambda = 0$

Pr. 1: Určte stred mocninového radu, polomer a interval konvergenencie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n(n+1)!} (x-3)^n$$

1. **Určiť stred mocninového radu a** – porovnaním zadania príkladu so všeobecným vyjadrením mocninového radu $\sum_{n \rightarrow 1}^{\infty} a_n(x-a)^n$, stred je $a = 3$
2. **Výpočet λ pre určenie polomeru konvergenencie pomocou D’Alambertovho kritéria**
 $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ alebo Cauchyho odmocninového kritéria $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Určíme člen $a_n = \frac{n!}{3^n(n+1)!}$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+1+1)!}}{\frac{n!}{3^n(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!3^n(n+1)!}{3^{n+1}(n+1+1)!n!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!3^n(n+1)n!}{3^n \cdot 3(n+2)(n+1)!n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{3(n+2)} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. **Určiť polomer konvergenencie ρ** – môže nastať jedna z možností

- $\rho = \frac{1}{\lambda}$ pre $0 < \lambda < \infty$ pre náš prípad $\rightarrow \rho = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$
- $\rho = 0$ pre $\lambda = \infty$
- $\rho = \infty$ pre $\lambda = 0$

4. Určiť interval konvergenzie (IK) - môže nastať jedna z možností

- ak $\rho = \frac{1}{\lambda}$ interval konvergenzie $IK = (a - \rho, a + \rho)$ na tomto intervale rad konverguje
- $\rho = 0$ konverguje v strede MR $IK = \{a\}$
- $\rho = \infty$ interval konvergenzie $IK = (-\infty, \infty)$

pre náš prípad $\rightarrow IK = (a - \rho, a + \rho) = (3 - 3, 3 + 3) = (0, 6)$

Pr. 2: Určte stred mocninového radu, polomer a interval konvergenencie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} (x + 2)^n$$

$$a = -2, a_n = \frac{n^2}{4^n}$$

Pr. 3: Určte stred mocninového radu, polomer a interval konvergencie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^4 + 1}{3n^4 + 5} \right)^{n+1} x^n$$

$$a = 0, a_n = \left(\frac{n^4 + 1}{3n^4 + 5} \right)^{n+1} \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{n^4 + 1}{3n^4 + 5} \right)^{n+1} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + 1}{3n^4 + 5} \right)^{\frac{n+1}{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + 1}{3n^4 + 5} \right)^{\frac{n}{n}} \left(\frac{n^4 + 1}{3n^4 + 5} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + 1}{3n^4 + 5} \right)^1 \left(\frac{n^4 + 1}{3n^4 + 5} \right)^0 = \frac{1}{3}$$

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$IK = (a - \rho, a + \rho) = (0 - 3, 0 + 3) = (-3, 3)$$

Pr. 4 – 31 / 177: Určte stred mocninového radu, polomer a interval konvergenencie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} x^n$$

$$\frac{1}{5}$$

$$a = 0, \mathbf{a_n} = \frac{5^n}{n} \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{5^n}{n}\right|} = \dots\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Pr. 5 – 31 / 186: Určte stred mocninového radu, polomer a interval konvergenzie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$$

0

$$a = -3, \mathbf{a_n = n^n}$$

Pr. 6 – 31 / 181: Určte stred mocninového radu, polomer a interval konvergenencie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} x^n$$

∞

$$a = 0, \mathbf{a_n} = \frac{n^k}{n!}$$

Pr. 7 – 34 / 206: Určte stred mocninového radu, polomer a obor konvergenencie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} (x-1)^n \quad \langle 0, 2 \rangle$$

$$a = 1, \quad a_n = \frac{1}{2n-1}$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2(n+1)-1}}{\frac{1}{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1 \quad \rho = \frac{1}{1} = 1$$

$$IK = (a - \rho, a + \rho) = (1 - 1, 1 + 1) = (0, 2)$$

Pre získanie oboru konvergenencie overíme konvergenciu radu v krajných bodoch IK:

1. do zadanie radu dosadíme prvý krajný bod $x = 0$, upravíme a overíme konvergenciu vzniknutého číselného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (-1)^n \rightarrow \text{rad so striedavými znamienkami}$$

Na overenie jeho konvergenencie použijeme **Lebnizovo kritérium**

Lebnizovo kritérium

pre každé x z $D(f)$ platí: $n < n + 1$ /.2

$$2n < 2(n + 1) \quad /-1$$

$$2n - 1 < 2(n + 1) - 1$$

$$\frac{1}{2n - 1} > \frac{1}{2n + 1} \rightarrow a_n > a_{n+1} \rightarrow \text{postupnosť je nerastúca}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n - 1} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow \text{rad so striedavými znamienkami konverguje}$$

↓

mocninový rad konverguje v $x = 0$

2. do zadanie radu dosadíme druhý krajný bod $x = 2$, upravíme a overíme konvergenciu vzniknutého číselného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \rightarrow \text{harmonický rad, z teórie vieme, že diverguje}$$

↓

mocninový rad diverguje v $x = 2$

3. Obor konvergenzie (OK) dostaneme z intervalu konvergenzie, v krajnom bode v ktorom mocninový rad konverguje zmeníme zátvorku (na <

$$\text{OK} = \langle 0, 2 \rangle$$

Pr. 8 – 34 / 212: Určte stred mocninového radu, polomer a obor konvergenzie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{x^n}{n} \qquad \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$a = 0, \quad a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n}$$

Pri výpočte postupujte podľa predchádzajúceho príkladu

Dú: str. 31 / 1172 -174, 176, 185; str. 34 / 205, 213, 261, 217, 220