

Matematika 3 – 6.cvičenie, príprava

2.1 Taylorov rad funkcie

Nech funkcia $f(x)$ má v bode a derivácie všetkých rádo. Mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

nazývame **Taylorov rad** (TR) funkcie so stredom v bode a .

Rozvoj niektorých funkcií do TR so stredom v bode $a = 0$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbb{R}$$

3. Diferenciálne rovnice

Diferenciálnou rovnicou n – tého rádu nazývame rovnicu $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ pričom $y = y(x)$ je neznáma funkcia.

Riešením diferenciálnej rovnice $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ na intervale I nazývame každú n – krát diferencovateľnú funkciu $y = y(x)$, $x \in I$, pre ktorú platí

$$F(x; y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice n –tého rádu môžeme napísať v tvare $y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ sú nezávislé konštanty.

3.1 Diferenciálne rovnice prvého rádu so separovateľnými premennými

Diferenciálna rovnica tvaru

$$\psi(y) \, dy = \varphi(x) \, dx$$

kde funkcie $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sú spojité na intervale I , sa nazýva **diferenciálna rovnica so separovanými premennými**.

Diferenciálnu rovnicu so separovanými premennými formálne **riešime**:

$$\int \psi(y) \, dy = \int \varphi(x) \, dx$$

(za predpokladu, že tieto integrály existujú).

Riešenie danej diferenciálnej rovnice môžeme vyjadriť:

- v explicitnom tvare - $y(x)$ je jednoznačne vyjadrené
- v implicitnom tvare - $y(x)$ nie je možné jednoznačne vyjadriť