Matematika 3 – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

2.1 Taylorov rad funkcie

Nech funkcia *f*(*x*) má v bode $\boldsymbol{a}$ derivácie všetkých rádov. Mocninový rad

$$\sum_{n\to 1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazývame **Taylorov rad** (TR) funkcie so stredom v bode $\boldsymbol{a}$.

Rozvoj niektorých funkcií do TR so stredom v bode $a = 0$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in R$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in R$$

Pr. 1: Pomocou základných mocninových radov určte Taylorov rad danej funkcie so stredom v bode $a = 0$ a vypočítajte integrál $\int_0^1 \sin^2 x \, dx$

1. Nahradiť x výrazom x^2 vo vzťahu $\sin x = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$ Taylorov rozvoj (TR)

2. Napísať rozvoj pre pár prvých členov

$$\sin x^2 = (-1)^0 \frac{x^{4.0+2}}{(2.0+1)!} + (-1)^1 \frac{x^{4.1+2}}{(2.1+1)!} + (-1)^2 \frac{x^{4.2+2}}{(2.2+1)!} + (-1)^3 \frac{x^{4.3+2}}{(2.3+1)!} + \cdots$$

$$\sin x^2 = \frac{x^2}{(1)!} - \frac{x^6}{(3)!} + \frac{x^{10}}{(5)!} - \frac{x^{14}}{(7)!} + \cdots$$

3. Pomocou TR pre danú funkciu riešiť integrál

$$\int_0^1 \sin^2 x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{(1)!} - \frac{x^6}{(3)!} + \frac{x^{10}}{(5)!} - \frac{x^{14}}{(7)!} + \cdots \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7.(3)!} + \frac{x^{11}}{11.(5)!} - \frac{x^{15}}{15(7)!} + \cdots \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^7}{7.(3)!} + \frac{1^{11}}{11.(5)!} - \frac{1^{15}}{15.(7)!} + \cdots \right] - 0 \approx 0{,}3103$$

Pr. 2 - 37 / 227: Pomocou základných mocninových radov určte Taylorov rad danej funkcie so stredom v bode $a = 0$ a vypočítajte integrál

$$\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

3. Diferenciálne rovnice

Diferenciálnou rovnicou *n* – tého rádu nazývame rovnicu $\boldsymbol{F(x, y, y', y'', \ldots . y^{(n)}) = 0}$ pričom $y = y(x)$ je neznáma funkcia.

Riešením diferenciálnej rovnice $\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', \ldots . y^{(n)}\right) = 0}$ na intervale I nazývame každú *n* – krát diferencovatelnú funkciu $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$, $x \in I$, pre ktorú platí

$$\boldsymbol{F(x;\ \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))(x) = 0}$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice n–tého rádu môžeme napísať v tvare $y = \varphi(x, c_1, c_2 \ldots \ldots c_n)$, kde , $c_1, c_2 \ldots \ldots c_n$ sú nezávislé konštanty.

Ak za jednotlivé konštanty $c_1, c_2 \ldots \ldots c_n$ dosadíme konkrétne čísla, hovoríme o **partikulárnom riešení diferenciálnej rovnice.**

3.1 Diferenciálne rovnice prvého rádu so separovateľnými premennými

Diferenciálna rovnica tvaru

$$\psi(y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

kde funkcie $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sú spojité na intervale I, sa nazýva **diferenciálna rovnica so separovanými premennými.**

Diferenciálnu rovnicu so separovanými premennými formálne **riešime**:

$$\int \psi(y)\,\mathrm{d}y = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

(za predpokladu, že tieto integrály existujú).

Riešenie danej diferenciálnej rovnice môžeme vyjadriť:

- v explicitnom tvare - $y(x)$ je jednoznačne vyjadrené
- v implicitnom tvare - $y(x)$ nie je možné jednoznačne vyjadriť

pomocné vzorce: $\ln e^{y} = y \quad e^{\ln x} = x$

$$e^{\ln x + c} = e^{\ln x}.e^{c} = x.e^{c} = x.c \qquad e^{2x+c} = e^{2x}.e^{c} = e^{2x}.c$$

Pr. 1: Riešte diferenciálnu rovnicu $(1+x^2)y' = \frac{2x}{1+4y}$

1. Nahradiť $y' = \frac{dy}{dx}$ $\quad (1+x^2)\boldsymbol{y'} = \frac{2x}{1+4y}$

$$(1+x^2)\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{2x}{1+4y}$$

2. Separovať premenné (oddelíme *y*, d*y* na jednu stranu a *x*, d*x* na druhú, tak aby d*y* a d*x* boli v čitateli)

$$(1+4y)\mathrm{d}y = \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

3. Upravené strany integrovať (úprava pomocou per partes, substitúcia alebo obyčajný integrál)

$$\int(1+4y)\mathrm{d}y = \int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$y + \frac{y^2}{2} + c_1 = \ln|1+x^2| + c_2$$

všeobecné riešenie: $\boldsymbol{y + \frac{y^2}{2} = ln|1+x^2| + C}$ $\qquad C = c_2 - c_1$

Pr. 2: Riešte diferenciálnu rovnicu $yy' = x.\cos x$

1. Nahradiť $y' = \frac{dy}{dx}$ $\qquad y\boldsymbol{y'} = x.\cos x$

$$y\frac{dy}{dx} = x.\cos x$$

2. Separovať premenné (oddelíme *y*, d*y* na jednu stranu a *x*, d*x* na druhú, tak aby d*y* a d*x* boli v čitateli)

$$y\,dy = x.\cos x\,dx$$

3. Upravené strany integrovať (úprava pomocou per partes, substitúcia alebo obyčajný integrál)

$$\int y\,dy = \int x.\cos x\,dx$$

per partes:

$$\int x.\cos x\,dx = x.\sin x - \int 1.\sin x\,dx = x.\sin x + \cos x + C$$

$$\begin{vmatrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{vmatrix}$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = x.\sin x + \cos x + c_2$$

$$\frac{y^2}{2} = x.\sin x + \cos x + C \qquad C = c_2 - c_1$$

$$y = \sqrt{2(x.sin\,x + cos\,x + C)}$$ **všeobecné riešenie**

Pr. 3 – 47 / 9: Riešte diferenciálnu rovnicu

$$y' = \frac{x^2 + x}{y + 1}$$

$$\frac{y^2}{2} + y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$$

Pr. 4 – 47 / 15: Nájdite metódou separácie premenných partikulárne riešenie rovnice, ktoré splna danú začiatočnú podmienku

$$y' \sin y \cos x - \cos y \sin x = 0 \qquad \cos y = c \cos x$$

Upraviť na tvar $\sin y \cos x \, \mathrm{d}y = \cos y \sin x \, \mathrm{d}x$ a potom separovať.

Pr. 5 – 47 / 40: Nájdite metódou separácie premenných partikulárne riešenie rovnice, ktoré splna danú začiatočnú podmienku $(1+e^x)\,y\,y' = e^x,\ y(0) = \sqrt{2\ln 2}$

1. Nahradiť $y' = \frac{dy}{dx}$ $\quad (1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$

2. Separovať premenné (oddelíme *y*, d*y* na jednu stranu a *x*, d*x* na druhú, tak aby d*y* a d*x* boli v čitateli)

$$y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

3. Upravené strany integrovať (úprava pomocou per partes, substitúcia alebo obyčajný integrál)

$$\int y dy = \int \frac{1+e^x}{e^x}dx$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \ln|1+e^x| + c_2$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + C$$ všeobecné riešenie rovnice

4. Dosadiť počiatočné podmienky a vypočítať ***C*** $\quad y = \sqrt{2\ln 2}, x = 0$

$$\frac{(\sqrt{2\ln 2})^2}{2} = \ln|1+e^0| + C$$

$$\frac{2\ln 2}{2} = \ln 2 + C \rightarrow C = 0$$

5. Dosadiť *C* do všeobecného riešenia rovnice

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1 + e^x| + C$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1 + e^x| + 0 \rightarrow \boldsymbol{\frac{y^2}{2} = \ln|1 + e^x|}$$ **partikulárne riešenie**

Pr. 6 – 47 / 38: Nájdite metódou separácie premenných partikulárne riešenie rovnice, ktoré splna danú začiatočnú podmienku

$$y' = 3y,\ y(0) = 2 \qquad y = 2\,e^{3x}$$

Pr. 7 : Nájdite metódou separácie premenných partikulárne riešenie rovnice, ktoré splna danú začiatočnú podmienku

$$(x^2 - 3)y' = cos^2 y . 2x \qquad y(2) = \frac{\pi}{3}$$

Dú: 47, 48 / 10, 14, 20, 28, 34, 39