

MOCNINOVÉ RADY (MR)

1. ČR → súčet
 KRITERIA K/D

2. MR → ř-polomna konverg.

Bolo ČR $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Funk. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ Teorie řad

Spec. případ

$f_0(x) \dots$ konst.

$f_1(x) \dots$ lineární

$f_2(x) \dots$ kvadratická

$\vdots$

MR je spec. řada fcn:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

koeficienty

proměnná

řada MR

? Když (pro zř x) je MR konvergentní?

? Kde to můžeme?

řada konvergenční

Spec $x=a$ MR $\xrightarrow{x=a}$ ČR

$$a_0 + \underbrace{a_1 \cdot 0 + 0 + \dots}_{0} \quad a \in \mathbb{C} \quad \text{MR konverguje na nějaké řadě?}$$

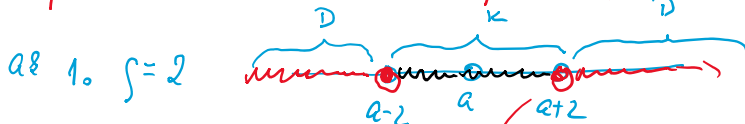
řada konverguje?



Teorie: Pro řadu MR existuje „číslo“ $\rho \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$

tedy, že na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$ je MR konvergentní

ak $\rho \neq \infty$ tak na $(-\infty, a-\rho) \cup (a+\rho, \infty)$ MR diverguje



ρ -interval

konvergenční (konvergent)

Bezd. ř. 2. $\rho = \infty$



$\rho = (-\infty, \infty)$ kolo $a-\infty = -\infty$
 $a+\infty = \infty$

3. $\rho = 0$



$\rho = \{a\}$ $\mathbb{C}$

u nás řada konverguje buď $\rho > 0$

AKO NÁJST ρ -polomna konverg.

u maticel rookro bude $\rho > 0$

AKO NÁJST ρ - polomer somr.?

ÚVAHA:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

keby $x=1$ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \notin \mathbb{D} \quad (\text{akt. k})$$

$$a=0$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Toto je m'roed me
n'aj clen' ρ

$$x=-1$$

$\mathbb{C}$ - so s'ied. sm'm.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \notin \mathbb{D}$$

$$1 \notin \sigma$$

$$\frac{1}{n} \downarrow 0$$

$$-1 \in \sigma$$

$$\text{M'ame } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = b_m$$

predstavme si, ze x je zvolene' real. cislo
polome, ale $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

a musime me k'ID pouzit - najde' k'ile'sum

Podielove' k'it.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x-a)^{n+1}}{a_n (x-a)^n} \right| =$$

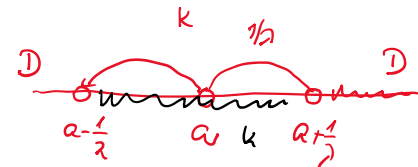
$$= |x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x-a| \cdot \lambda < 1 \quad \text{kon}$$

$$> 1 \quad \text{div}$$

bolo $\sum a_n$

$$1. \lambda \in (0, \infty) \quad |x-a| < \frac{1}{\lambda}$$

$$> \frac{1}{\lambda}$$



to ale znamene, ze $\rho = 1/\lambda$

$$2. \lambda = 0 \quad |x-a| \cdot 0 < 1$$

$$\text{rade } \mathbb{D} = (-\infty, \infty)$$

$$\rho = \infty = \frac{1}{\lambda}$$

$$3. \lambda = \infty \quad |x-a| \cdot \infty < 1 \quad x \neq a \quad \mathbb{D}$$

$$\sigma = \{a\} \quad \rho = 0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\infty}$$

Do'over. Keel existuje (m'os'ne/m'ne'os'ne)

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad \text{Polome polomer konv. } \rho \text{ me } \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

I.

$$\rho = \frac{1}{\lambda}$$

II.

$$\rho \left| \int = \overline{\lambda} \right|$$

Poznámka

Q2 by sme v odhadovaní použili ODRAC. KRIT, toľ

II.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Q_n|}$$

Príklad. Najdite $\int$ pre MR $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $a=0$
 $Q_n = \frac{1}{n}$

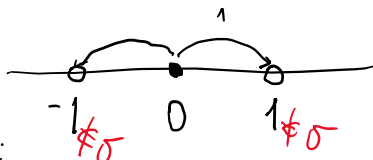
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \int = 1$$

na $(-1, 1)$ MR K

na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ MR D

ostalo $-1, 1$

toľ sme ale už vybočili



$$\int = (-1, 1)$$

OPERÁCIE s MR

Všdy: Máme MR $\sum Q_n(x-a)^n$ s $\int > 0$

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots = S(x) \quad \text{na } (a-\int, a+\int)$$

derivuj $a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots = S'(x)$ na $(a-\int, a+\int)$

nový MR môžeme pôvodný rad aj integrovať člen za členom a $\int$ sa zmení
 $\int dx$ $\int_c dx$

Praktické využitie:

Geom. rad MR $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ $|x| < 1$ $\int = 1$

MR $1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$ $|x| < 1$

$2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \dots = \frac{2}{(1-x)^3}$ $|x| < 1$

U1 $\int_0^{1/2} \arctg x \, dx$

U2 $\int_0^{1/2} \arctg(x^2) \, dx$

geom $q = -x^2$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2} \quad |x| < 1$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \arctg x + \frac{\pi}{2} \quad |x| < 1$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \arctg x + \cancel{0} \quad \int_0^{1/2} \quad / x=0$$

$$\int_0^{1/2} \arctg x \, dx \stackrel{U1}{=} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{1/2} - \left. \frac{x^4}{3 \cdot 4} \right|_0^{1/2} + \left. \frac{x^6}{5 \cdot 6} \right|_0^{1/2} - \dots$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{12 \cdot 2^4} + \frac{1}{30 \cdot 2^6} - \dots$$

ALT. ĆR

$$|s_1 - s_2| < a_3 = \frac{1}{30 \cdot 2^6}$$

Qđ by sme pre el. fcie $e^x, \sin x, \cos x$ majdeme MR (tož ako pre $\arctg x$) ne bude problem s hypo-určitel'nost'.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = ?!$$

PF sa meda' n'jednot' cel' el. fcie

Za 5b

$e^x, \sin x, \cos x$ N'rod toľo s' d'ez ur'ob'ime

ULOHA pre domu fciu $f(x)$ maj'ri MR, d'ob'ito je fci' m'etom (d'i, ako pre $f(x) = \arctg x$)

$$\sin(2 + 3i)$$

Posly ODZADU, predp'edod'me, z' tady' MR m'ame a d'um'me, co' m'ubne p'ed'i

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots = f(x) \quad \text{ne } (e^{-f}, e^{+f})$$

Co' p'ed'i m'ubne pre d'ef.

$x=a$

$$a_0 = \frac{f(a)}{0!}$$

U'p'oc'ital som prv' d'ef.

$$a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots = f'(x) \quad / ()'$$

$x=a$

$$a_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \dots = f''(x)$$

$x=a$

$$2a_2 = f''(a) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(a)}{2 \cdot 1}$$

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Z'mer

Ak p'ed'i $\sum a_n(x-a)^n = f(x)$, tož m'ubne $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Pre el. fcie $f(x) = e^x, \sin x, \cos x$ je to q' postoc' podmienka!

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad \text{p'ed'i pre el. fcie?}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a)}{n!} (x-a)^n, \quad \text{Alde' pre el. fcie?}$$

TAYLOROV RAD (je speci'el, MR)

Hledáme TR pro $f(x) = e^x$, $a=0$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (-\infty, \infty)$$

obor shromaz. / polomer 2. f

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \rho = \infty$$

je to kon. od'zse.

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0 = a_0$	
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1 \leftarrow$	
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$	
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1 \leftarrow$	$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
$f^{(4)}(x) = \sin x$		

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{na } (-\infty, \infty)$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{4!} + \dots \right) dx$$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}$ $t = -x^2$

$$\left. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2 \cdot 5} - \frac{x^7}{4! \cdot 7} \right|_0^1$$

ALT. RAD

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 5} - \left(\frac{1}{4! \cdot 7} \right) \left| \text{ch'by je menšic eš } \frac{1}{4! \cdot 7} \right.$$

$$\frac{1}{6! \cdot 9}$$