

Matematika I – 2.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Konzultácie: štvrtok : 11:00 – 12:00, 12:30 – 13:30

Funkcia

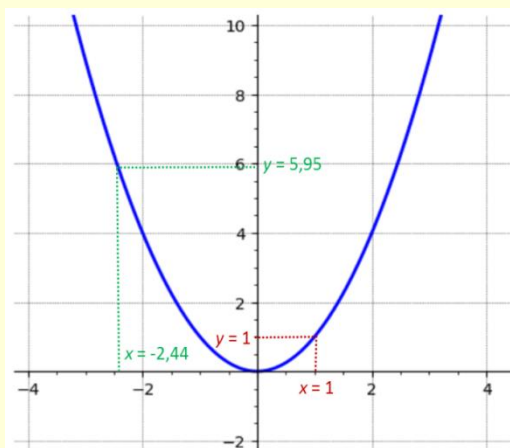
Definičný obor funkcie

Funkcia f je pravidlo (predpis), ktoré každému x z definičného oboru funkcie priraduje **práve jeden prvok** $f(x)$ resp. y , z oboru hodnôt funkcie

definičný obor funkcie $D(f)$
obor hodnôt funkcie $H(f)$

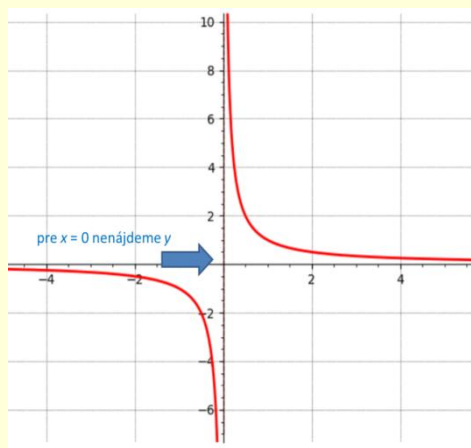
Príklady zápisu funkcie $f: y = 2e^x$, $f(x) = \sin x$, $y = \frac{x-1}{x+2}$

$$f: y = x^2$$



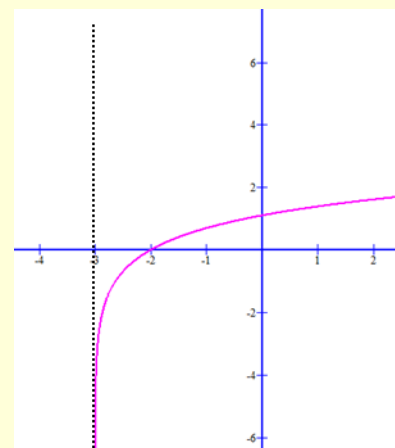
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$f: y = \frac{1}{x}$$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

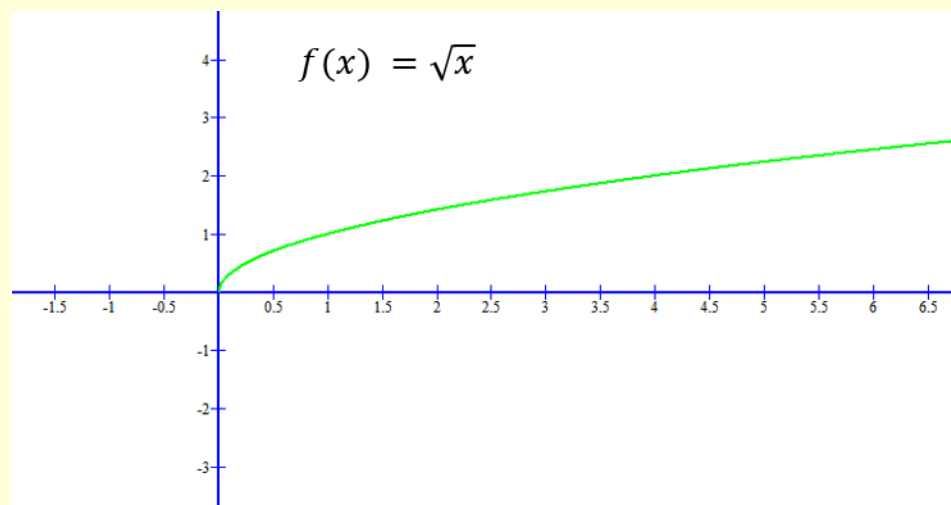
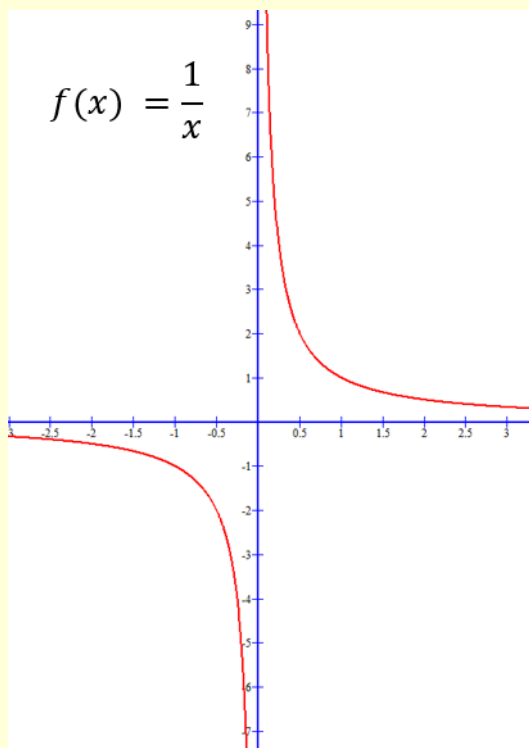
$$f: y = \ln(x + 3)$$



$$D(f) = (-3, \infty)$$

Podmienky určovania $D(f)$

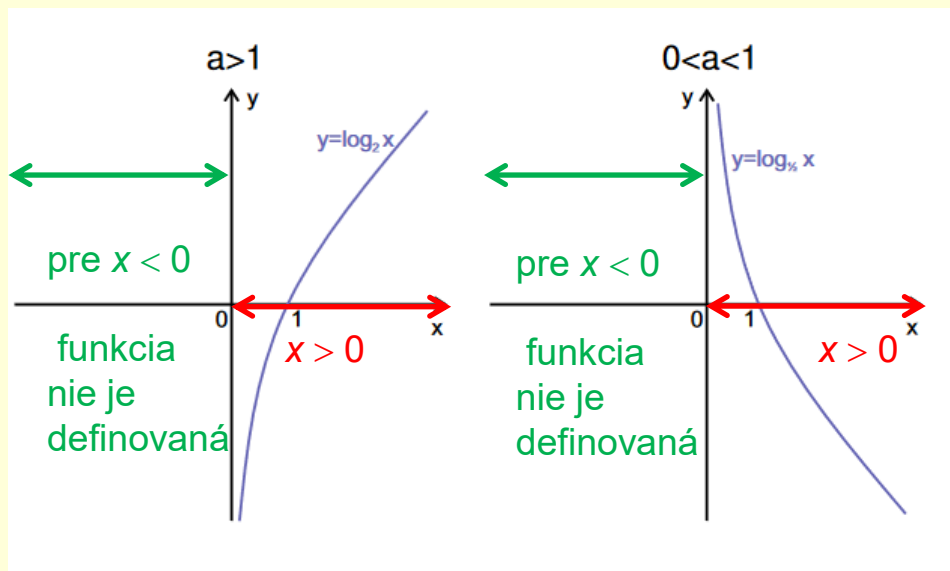
- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule $\frac{a}{b} \rightarrow b \neq 0$
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný $\sqrt[n]{x} \rightarrow x \geq 0$



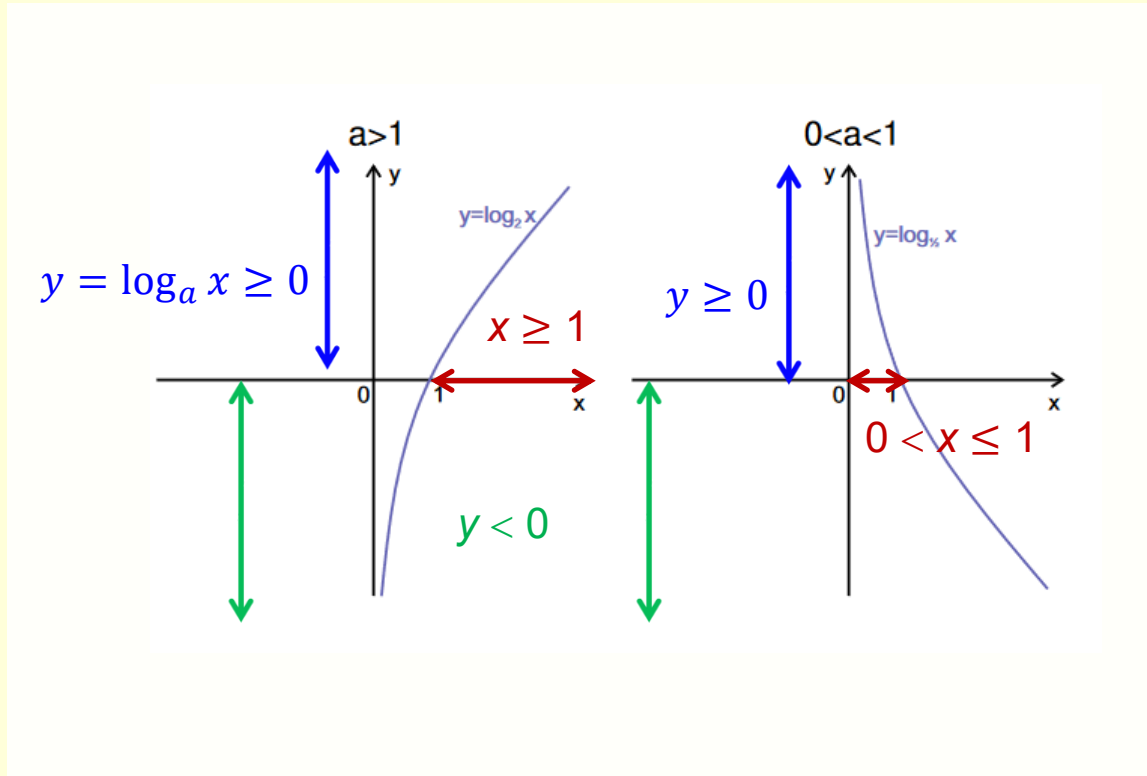
- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument

$$\log_a x \rightarrow x > 0$$

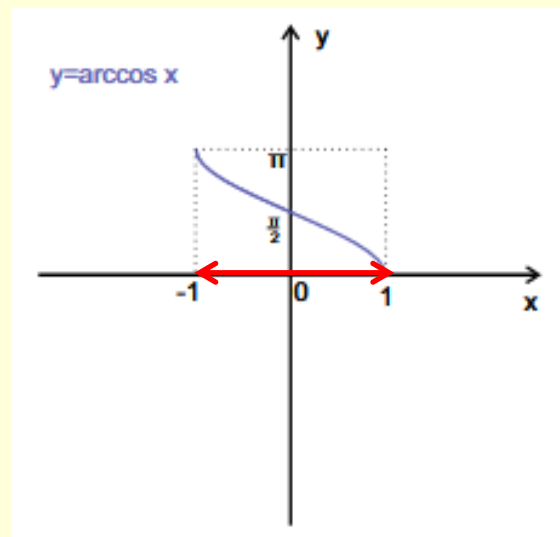
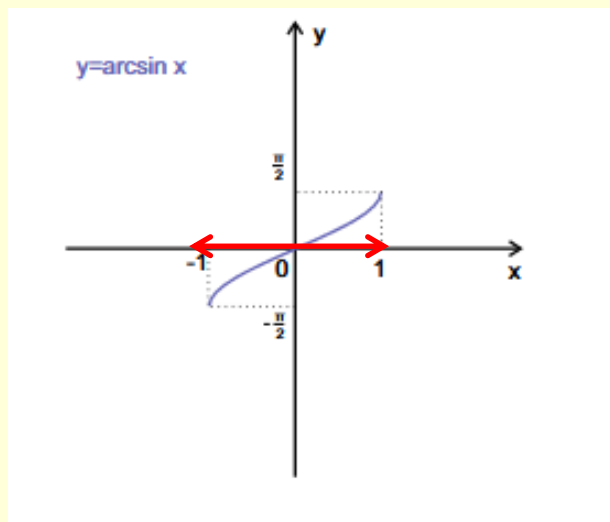
$$\ln x \rightarrow x > 0$$



$\sqrt[n]{\log_a x} \rightarrow$ ak $a > 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $x \geq 1$
 ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $0 < x \leq 1$



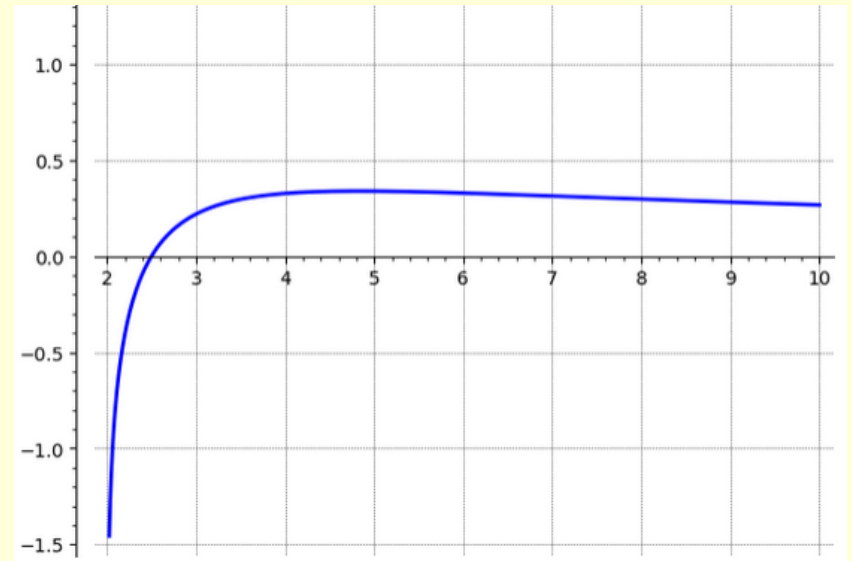
- funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ sú definované pre $-1 \leq x \leq 1$



Pr. 1: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \frac{\ln(2x-4)}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}$$

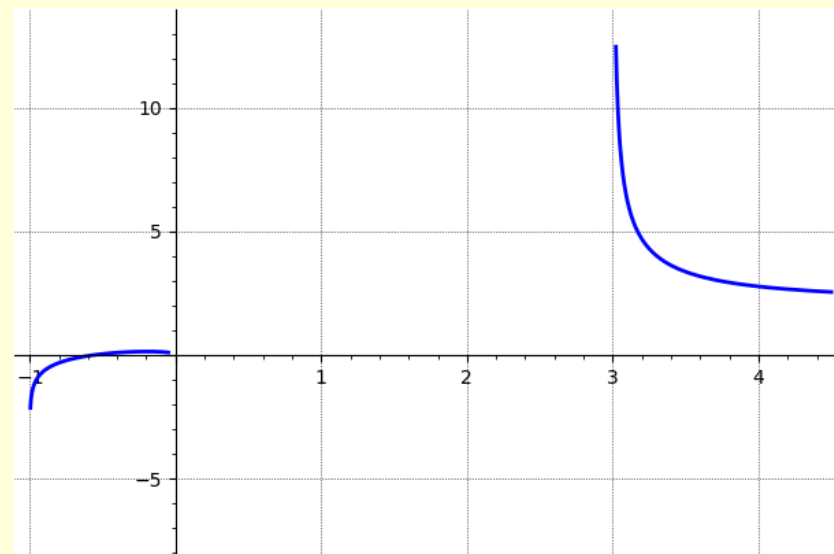
$$D(f) = (2, \infty)$$



Pr. 2: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \sqrt{\frac{x}{x-3}} + \log_8(\sqrt{x+1})$$

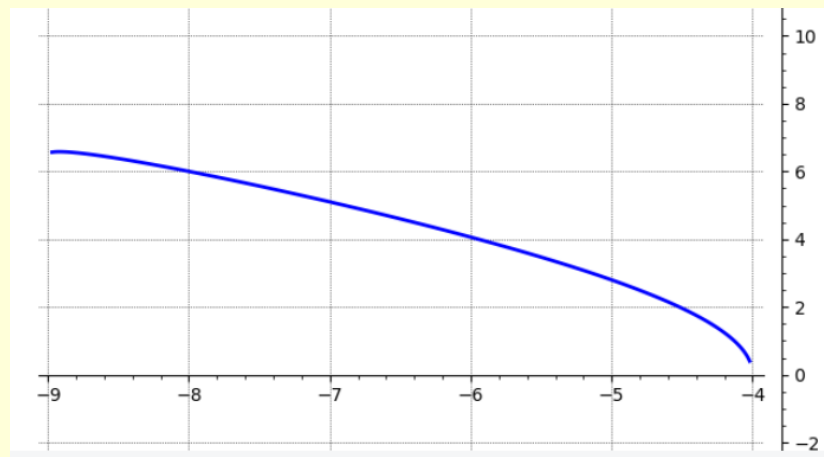
$$D(f) = (-1, 0) \cup (3, \infty)$$



Pr. 3: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \sqrt{x^2 - 16} + \arcsin \frac{x+4}{5}$$

$$D(f) = \langle -9, -4 \rangle$$



Pr. 4: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \arccos\left(\frac{2x+3}{11}\right) + \sqrt[6]{x-3}$$

$$D(f) = \langle 3, 4 \rangle$$

z podmienky pre odmocninu: $x - 3 \geq 0$

z podmienky pre arccos: $-1 \leq \frac{2x+3}{11} \leq 1$



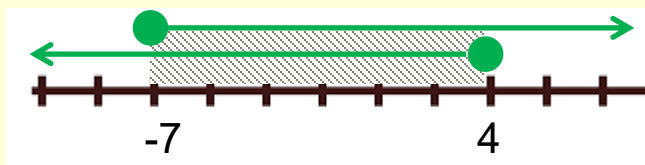
$$-1 \leq \frac{2x+3}{11} \wedge \frac{2x+3}{11} \leq 1 \quad \wedge \quad x - 3 \geq 0$$

$$-11 \leq 2x+3 \qquad 2x+3 \leq 11 \qquad x \geq 3$$

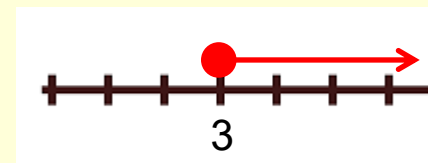
$$-11 - 3 \leq 2x \qquad 2x \leq 11 - 3$$

$$-14 \leq 2x \qquad 2x \leq 8$$

$$-7 \leq x \qquad x \leq 4$$

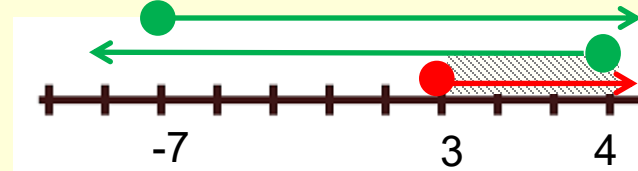


$$K_1 = \langle -7, 4 \rangle$$



$$K_2 = \langle 3, \infty \rangle$$

$$D(f) = K_1 \cap K_2 = \langle 3, 4 \rangle$$



Pr. 5: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt[6]{\log_4 \frac{2x}{x-1}}$$

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$$

Pr. 6: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(4x - 3)} + \sqrt[7]{\frac{x^3 + 4x}{x - 1}}$$

$$D(f) = \left(\frac{3}{4}, 1\right)$$

Pr. 7: Určte definičný obor funkcie:

$$f: y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x - 5)} + \sqrt[6]{\log_7(x + 1)}$$

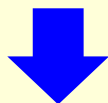
$$D(f) = (5, 6)$$

z podmienky pre 2. odmocninu: $\log_{\frac{1}{3}}(x - 5) \geq 0$

z podmienky pre logaritmus: ak $0 < a = \frac{1}{3} < 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x - 5 \leq 1$

z podmienky pre 6. odmocninu: $\log_7(x + 1) \geq 0$

z podmienky pre logaritmus: ak $a = 7 > 1 \rightarrow \log_7(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 1$

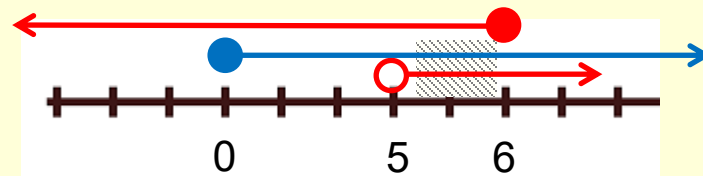


$$0 < x - 5 \leq 1 \quad \wedge$$

$$x + 1 \geq 1$$

$$0 < x - 5 \wedge x - 5 \leq 1 \quad \wedge \quad x + 1 - 1 \geq 0$$

$$5 < x \quad \wedge \quad x \leq 6 \quad \wedge \quad x \geq 0$$



$$D(f) = (5, 6)$$

Pr. 8 – str. 6 / 11: Určte definičný obor funkcie:

$$f : y = \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$$

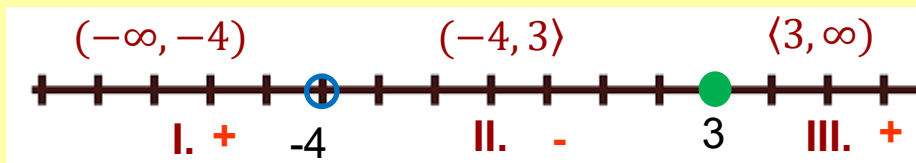
$$(-\infty, -4) \cup \langle 3, \infty)$$

z podmienky pre odmocninu $\frac{x-3}{x+4} \geq 0$

z podmienky pre zlomok $x+4 \neq 0$

Intervalová metóda:

NB: $-4, 3$



$$D(f) = (-\infty, -4) \cup \langle 3, \infty)$$

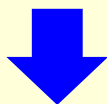
Pr. 9 – str. 8 / 11: Určte definičný obor funkcie:

$$f : y = \sqrt{x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2x-5}} + \ln(2x-3) \qquad \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

z podmienky pre odmocninu: $x \geq 0$

z podmienky pre zlomok: $2x - 5 \neq 0$

z podmienky pre logaritmus: $2x - 3 > 0$



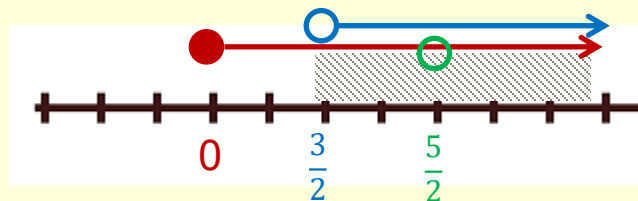
$$x \geq 0 \wedge 2x - 5 \neq 0 \wedge 2x - 3 > 0$$

$$2x \neq 5$$

$$2x > 3$$

$$x \neq \frac{5}{2}$$

$$x > \frac{3}{2}$$



$$D(f) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

Pr. 10: Určte definičný obor funkcie:

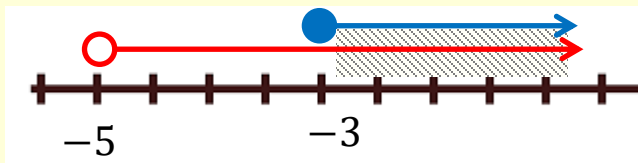
$$f: y = \log_5(x + 5) + \sqrt[6]{x + 3}$$

z podmienky pre logaritmus: $x + 5 > 0$

z podmienky pre odmocninu: $x + 3 \geq 0$



$$\begin{array}{ll} x + 3 \geq 0 & \wedge \quad x + 5 > 0 \\ x \geq -3 & x > -5 \end{array}$$



$$D(f) = \langle -3, \infty \rangle$$

Pr. 11: Určte definičný obor funkcie:

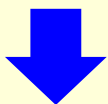
$$f: y = \log_5[(x-1)(x+3)] + \sqrt{\frac{1}{x-3}}$$

$$D(f) = (3, \infty)$$

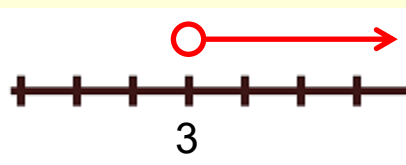
z podmienky pre odmocninu: $\frac{1}{x-3} \geq 0$
z podmienky pre zlomok: $x-3 \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x-3} \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{array} \right\} \frac{1}{x-3} > 0 \rightarrow x-3 > 0$$

z podmienky pre logaritmus: $(x-1)(x+3) > 0$

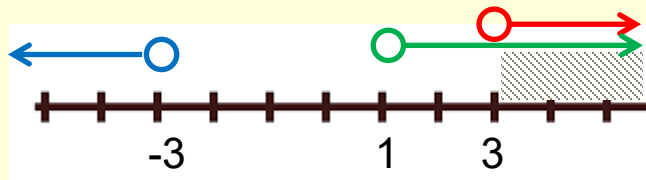


$$x-3 > 0 \wedge (x-1)(x+3) > 0 \rightarrow x > 3$$



$$K_1 = (3, \infty)$$

$$D(f) = K_1 \cap K_2 = (3, \infty)$$

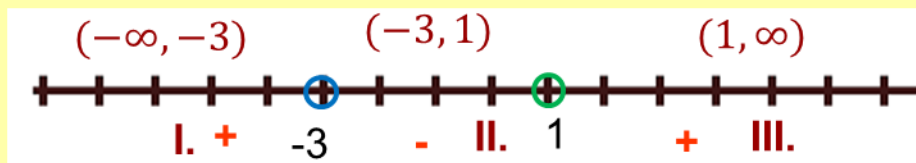


Intervalová metóda:

1. určíme nulové body (NB)

$$x-1=0, x+3=0 \text{ NB: } -3; 1$$

2. rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB



3. na každom intervale určíme znamienko výrazu $(x-1)(x+3)$

výsledkom sú intervaly, kde bude súčin zátvoriek > 0 ,
kde je výsledné znamienko +

$$K_2 = (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

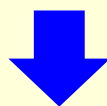
Pr. 12 - str. 7 / 23: Určte definičný obor funkcie:

$$23. \quad f: y = \sqrt{\log_2 \frac{3}{x-3}} \quad (3, 6)$$

z podmienky pre odmocninu: $\log_2 \frac{3x}{x-3} \geq 0$

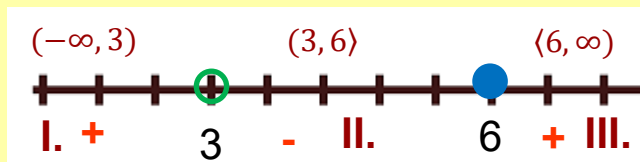
z podmienky pre logaritmus: ak $a = 2 > 1 \rightarrow \log_2 \frac{3}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-3} \geq 1$

z podmienky pre zlomok: $x - 3 \neq 0$



Intervalová metóda:

NB: 3, 6



$$\frac{3}{x-3} \geq 1 \quad \wedge \quad x-3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$\frac{3}{x-3} - 1 \geq 0$$

$$\frac{3-x+3}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{6-x}{x-3} \geq 0$$

$$D(f) = (3, 6)$$

Dú: str. 6 - 9 / 12, 14, 19, 20, 22, 25, 26, 37, 39, 45, 46, 48, 49, 54, 55, 56, 58

Pr. 8 – 12 z prezentácie opísať

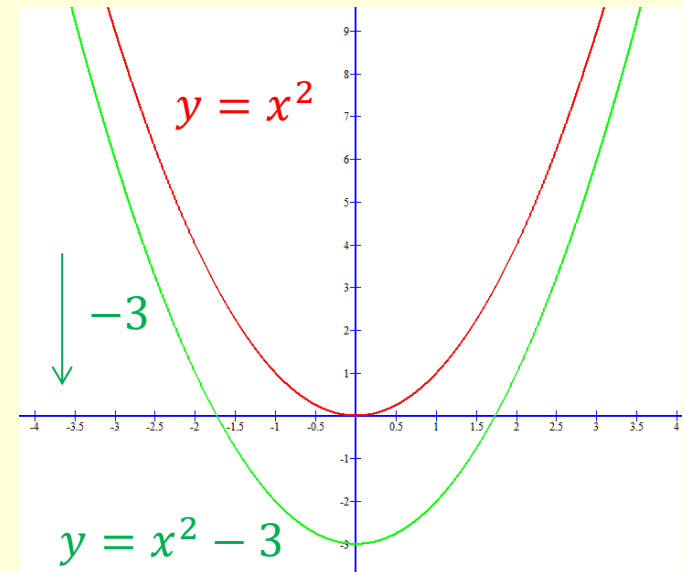
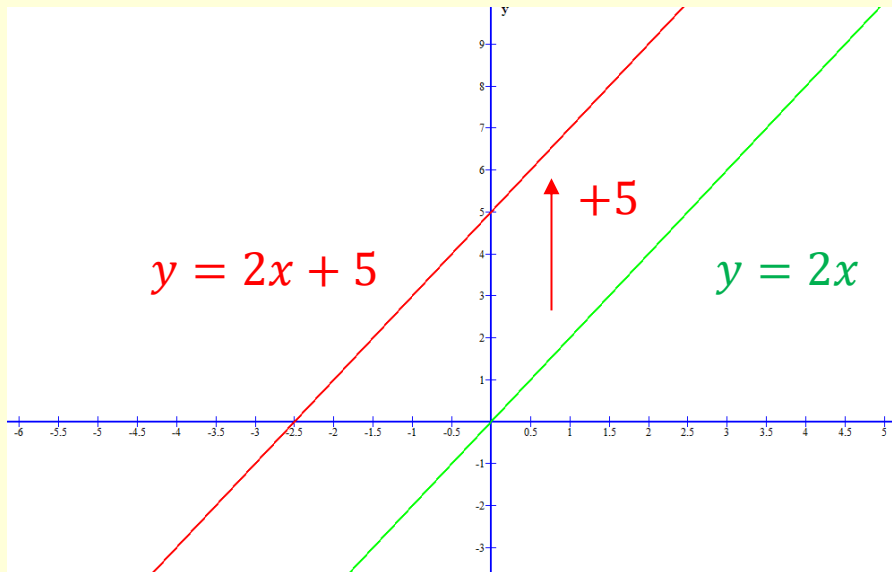
Transformácie grafov (nepovinné)

Všetky úpravy dostaneme z pôvodného grafu $y = f(x)$

1. Pripočítanie konštanty $a \in \mathbb{R}$:

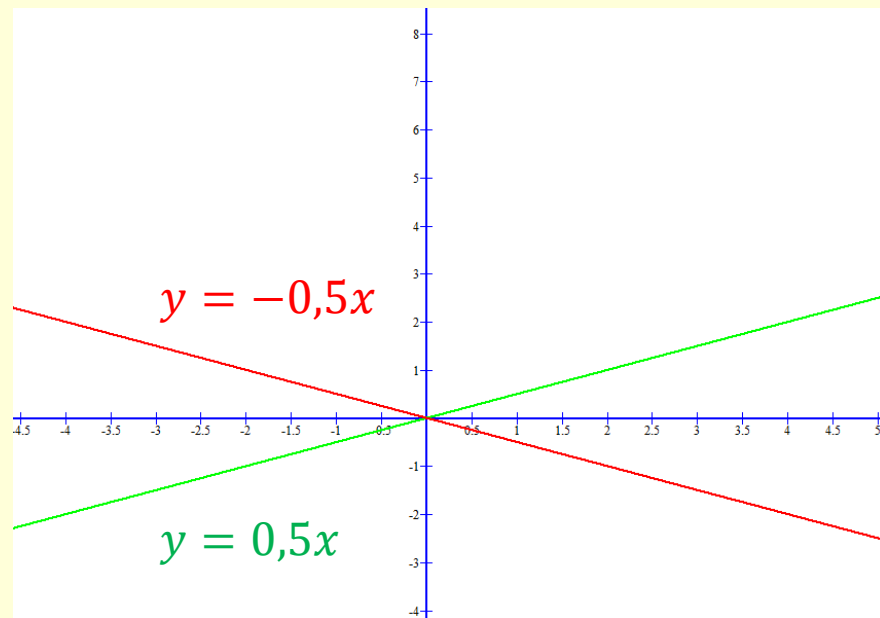
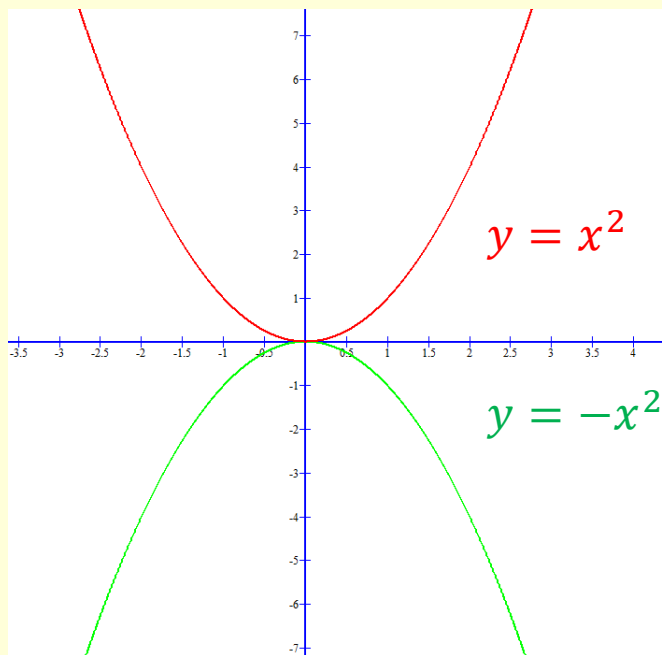
graf $y = f(x)$ posun **nahor**, ak $a > 0$ v smere osi y o $+a$

posun **nadol**, ak $a < 0$ v smere osi y o $-a$

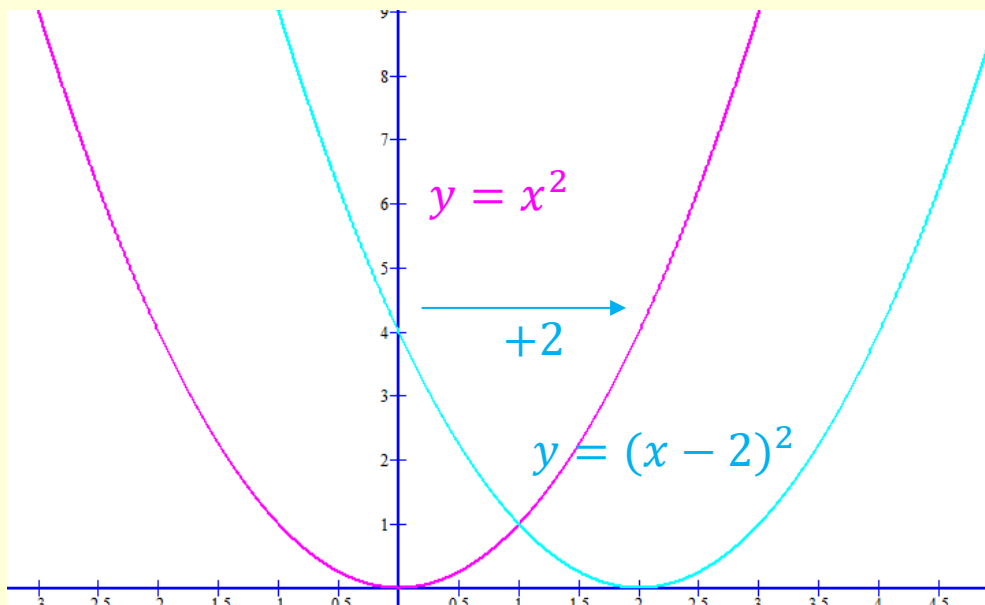


2. Násobenie číslom -1

graf $y = -f(x)$ je **osovo súmerný na os x** s grafom $y = f(x)$



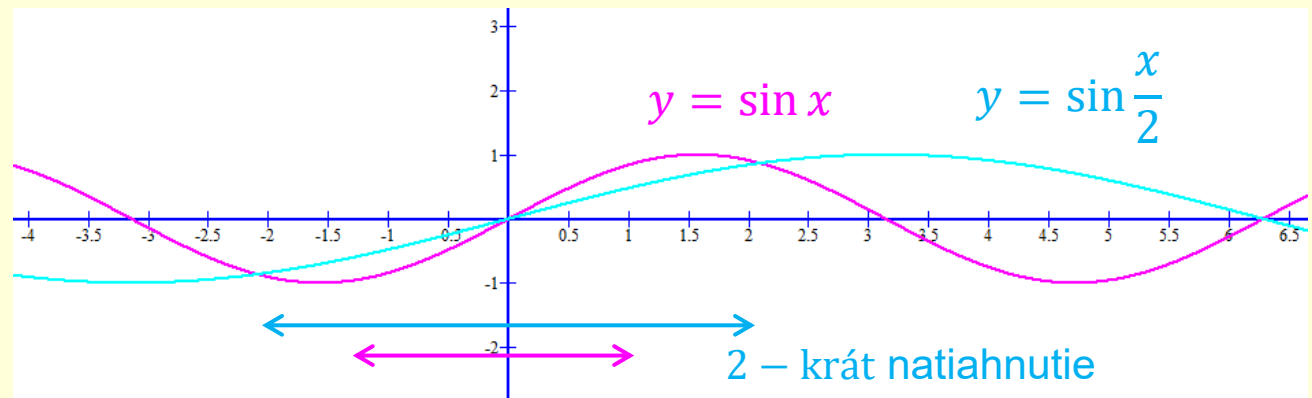
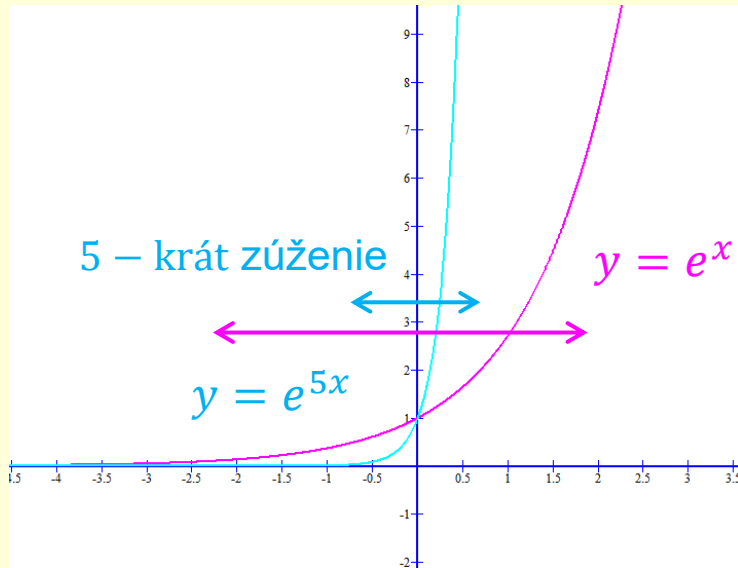
3. Dané pevné $a \in \mathbb{R}$, nový graf v tvare $y = f(x - a)$
graf $y = f(x)$ posun **doprava** o $+a$, ak $a > 0$ na osi x
posun **dola**va o $-a$, ak $a < 0$ na osi x



4. Dané pevné kladné reálne číslo $k \neq 1$, nový graf v tvare $y = f(kx)$

ak $k > 1$ graf $y = f(x)$ k – násobné zúženie pozdĺž osi x

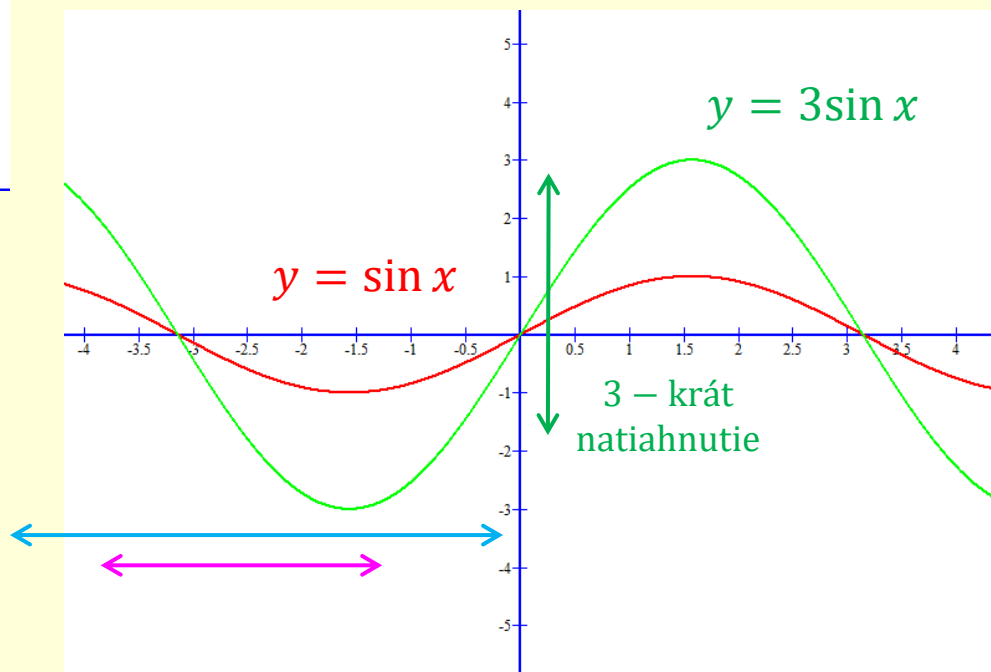
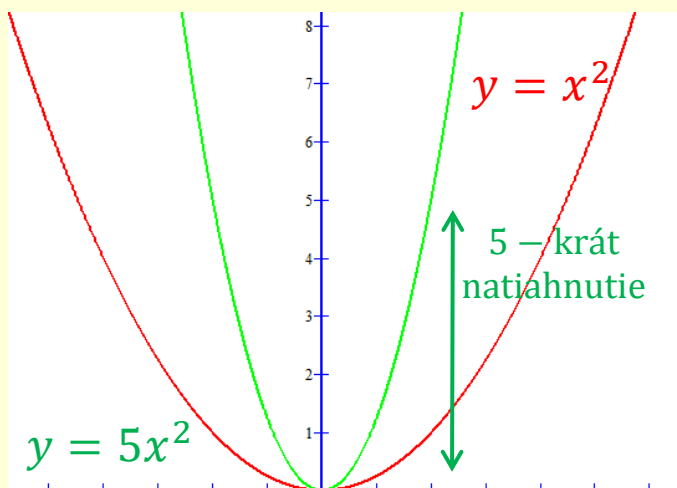
ak $k < 1$ graf $y = f(x)$ $\frac{1}{k}$ – násobné natiahnutie pozdĺž osi x



5. Dané pevné kladné reálne číslo $k \neq 1$, nový graf v tvare $y = k \cdot f(x)$

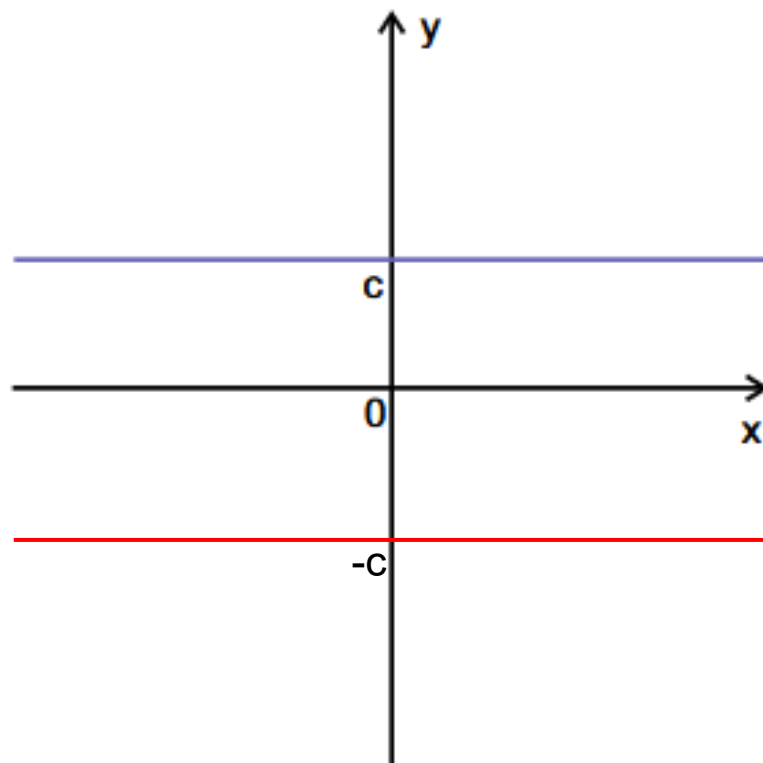
ak $k > 1$ graf $y = f(x)$ k – násobné natiahnutie pozdĺž osi y

ak $k < 1$ graf $y = f(x)$ $\frac{1}{k}$ – násobné zúženie pozdĺž osi y



Elementárne funkcie

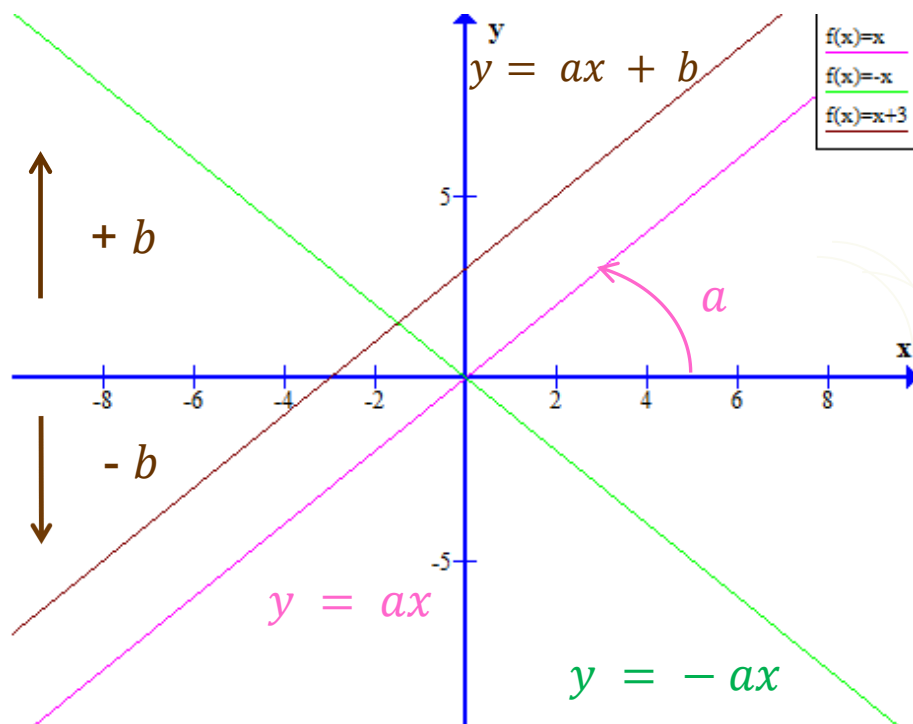
Konštantná funkcia $y = c, c \in \mathbb{R}$



Grafom je priamka rovnobežná s osou x. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Lineárna funkcia $y = ax + b, a \neq 0$



a - ovplyvní sklon priamky
 $-a$ - ovplyvní smer priamky
 b - posun na osi y

$y = ax$ - **nemá** priesečníky P_x, P_y

$y = ax + b$ - **má** priesečníky P_x, P_y

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Pre dve hodnoty x z $D(f)$ vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
3. Viesť zvolenými bodmi priamku.

Grafom je priamka. $D(f) = \mathbb{R}$

Pr. 1: Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = 0,5x$

b) $y = -x + 5$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
3. Viest' zvolenými bodmi priamku.