

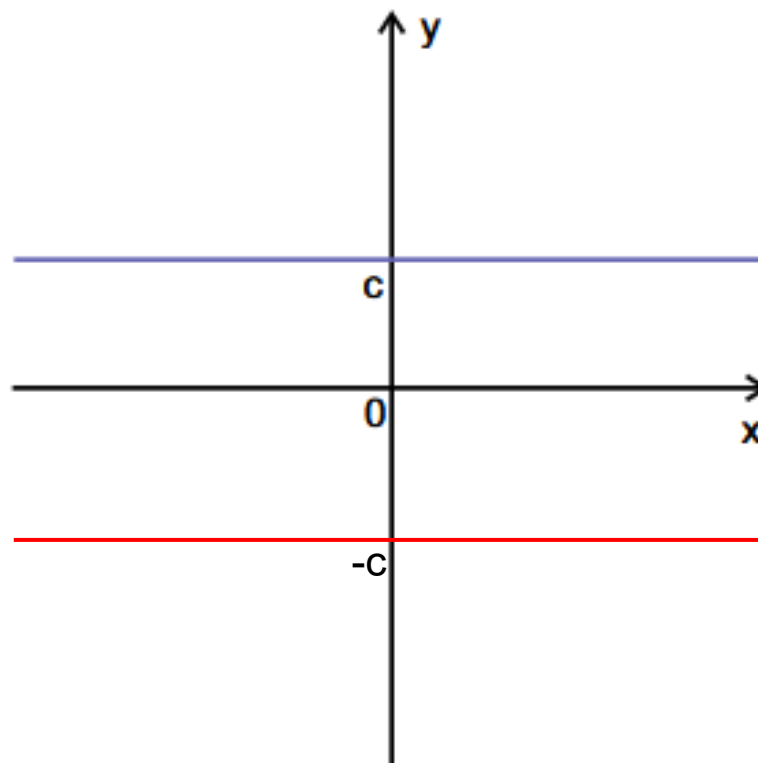
Matematika I – 3.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Konzultácie: štvrtok : 11:00 – 12:00, 12:30 – 13:30

Elementárne funkcie

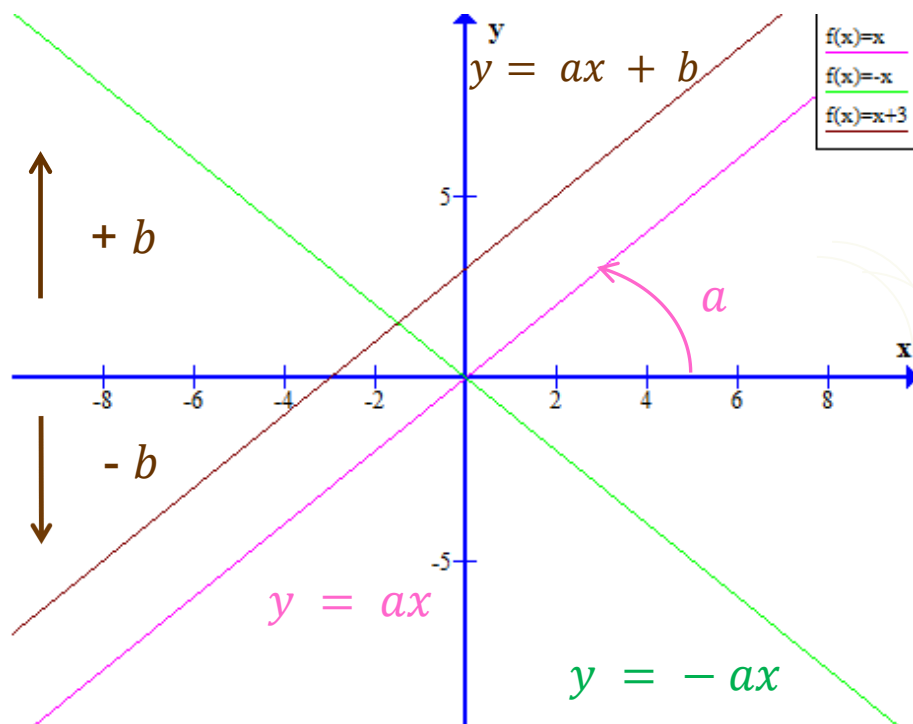
Konštantná funkcia $y = c, c \in \mathbb{R}$



Grafom je priamka rovnobežná s osou x. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Lineárna funkcia $y = ax + b, a \neq 0$



a - ovplyvní sklon priamky
 $-a$ - ovplyvní smer priamky
 b - posun na osi y

$y = ax$ - **nemá** priesečníky P_x, P_y

$y = ax + b$ - **má** priesečníky P_x, P_y

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Pre dve hodnoty x z $D(f)$ vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
3. Viesť zvolenými bodmi priamku.

Grafom je priamka. $D(f) = \mathbb{R}$

Pr. 1: Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = 0,5x$

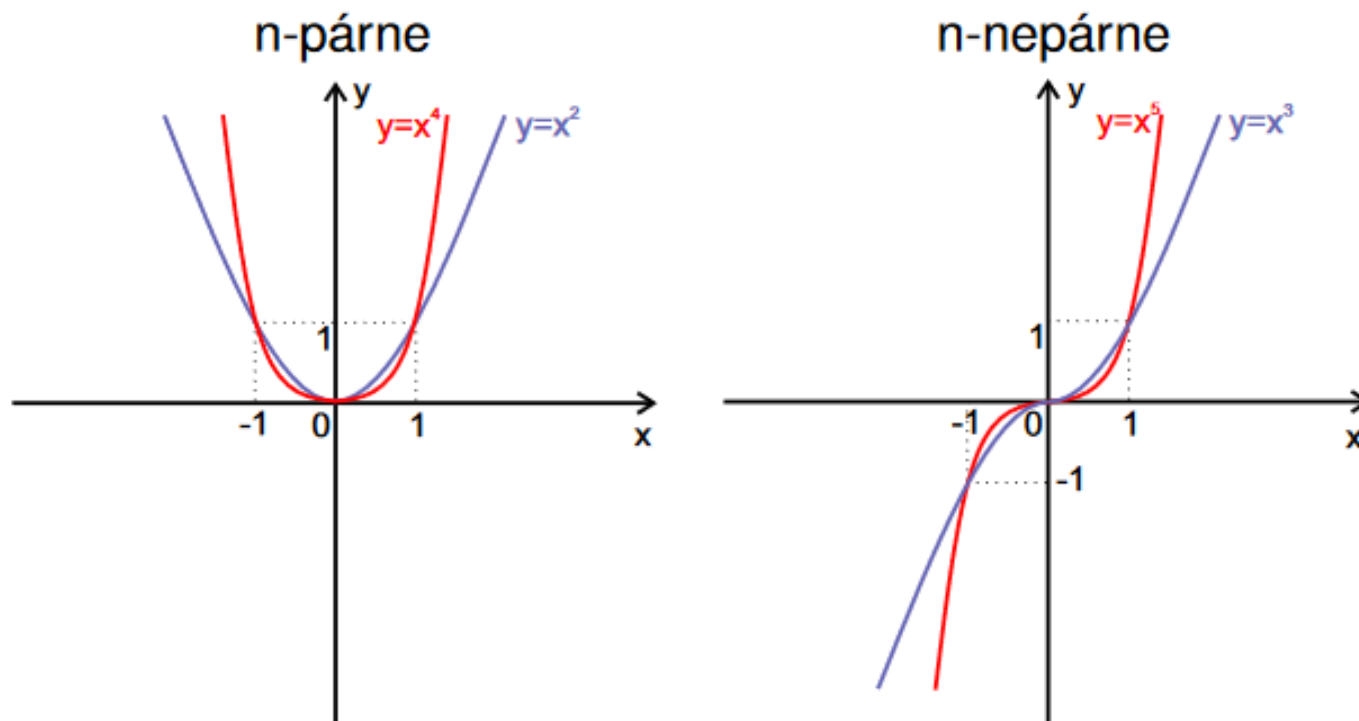
b) $y = -x + 5$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
3. Viest' zvolenými bodmi priamku.

Elementárne funkcie

Mocninová funkcia $y = x^n, n \in \mathbb{N}$

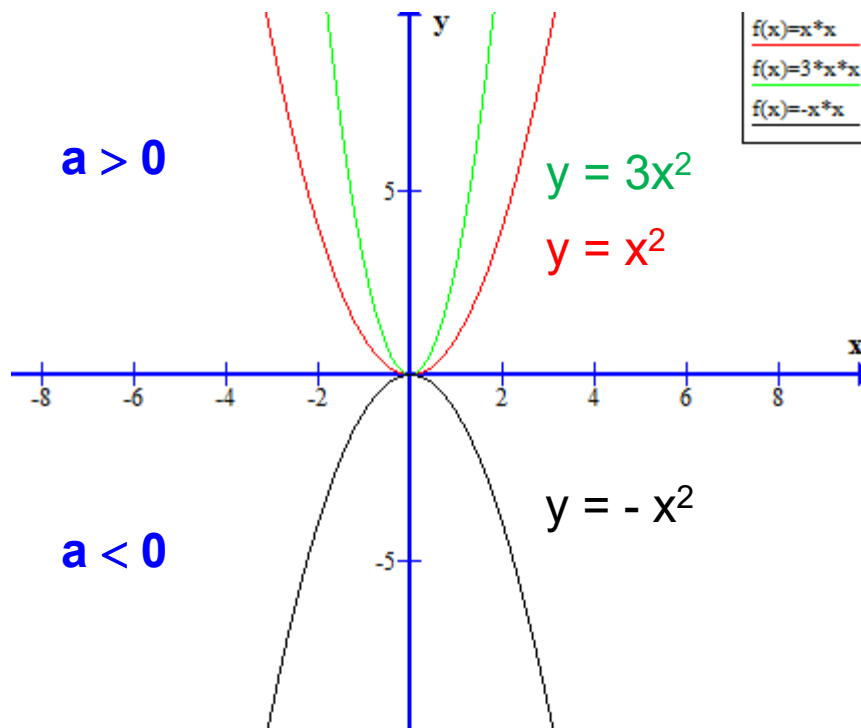


$$D(f) = \mathbb{R}$$

Elementárne funkcie

Kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$, $b = c = 0$
 $a \neq 0$

špeciálny prípad mocnínovej funkcie



a - ovplyvní strmosť funkcie
- a - orientácia funkcie

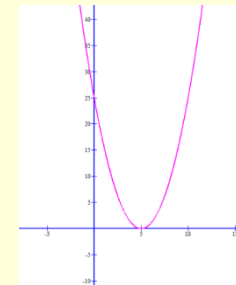
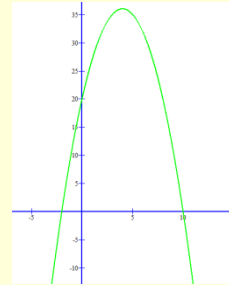
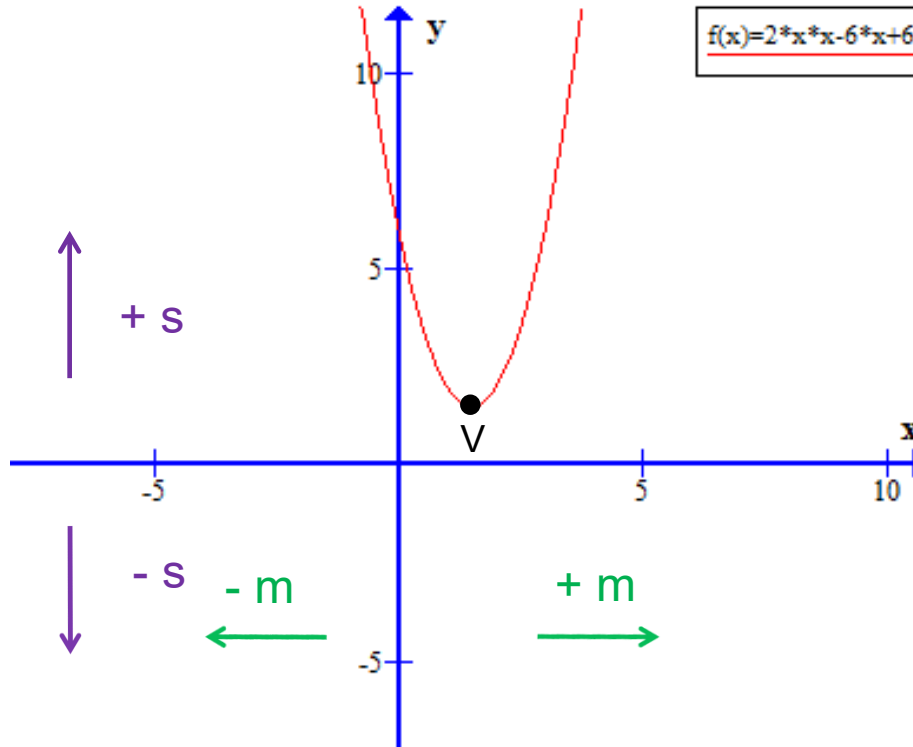
má priesečník $P_x = P_y$, je vrcholom V paraboly

Grafom je parabola. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 6$$



$D > 0$, **dva** priesečníky: x_1, x_2

$D = 0$, **jeden** priesečník: $x_1 = x_2$

$D < 0$, **nemá** priesečníky s osou x

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = a(x - m)^2 + s$$

Vrchol paraboly: $V(m, s)$

m – posun na osi x

s – posun na osi y

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť súradnice vrcholu $V(m, s)$.
3. Vypočítať priesečníky s osou X (zvolíme $y = 0$) pomocou diskriminantu, ak nemá priesečníky zvolíme dva body z $D(f)$ a vypočítame y .
4. Vypočítať priesečník s osou Y (zvolíme $x = 0$).
5. Viesť parabolu cez vrchol a určené priesečníky (body).

Pr. 2: Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = x^2 - 2x + 1$

b) $y = -3x^2 - 6x + 2$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť súradnice vrcholu $V (m, s.)$
3. Vypočítať priesečníky s osou X (zvolíme $y = 0$) pomocou diskriminantu, ak nemá priesečníky zvolíme dva body z $D(f)$ a vypočítame y .
4. Vypočítať priesečník s osou Y (zvolíme $x = 0$).
5. Viesť parabolu cez vrchol a určené priesečníky s osami.

Pr. 3: Načrtnite graf funkcie:

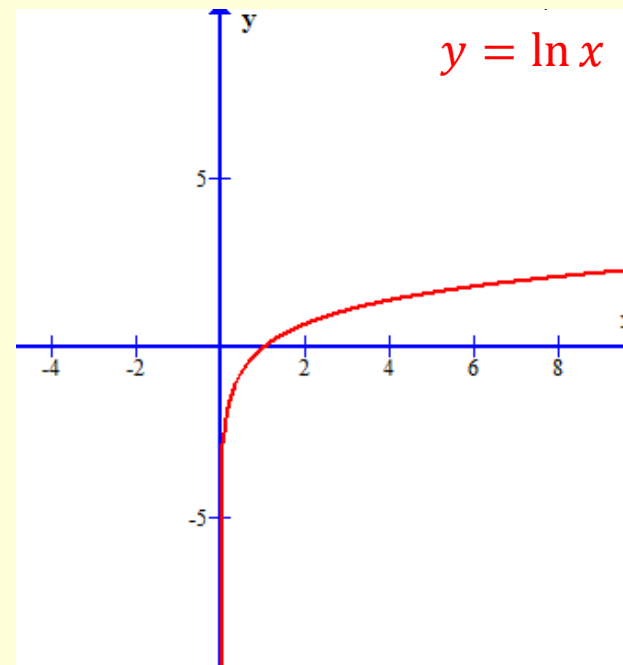
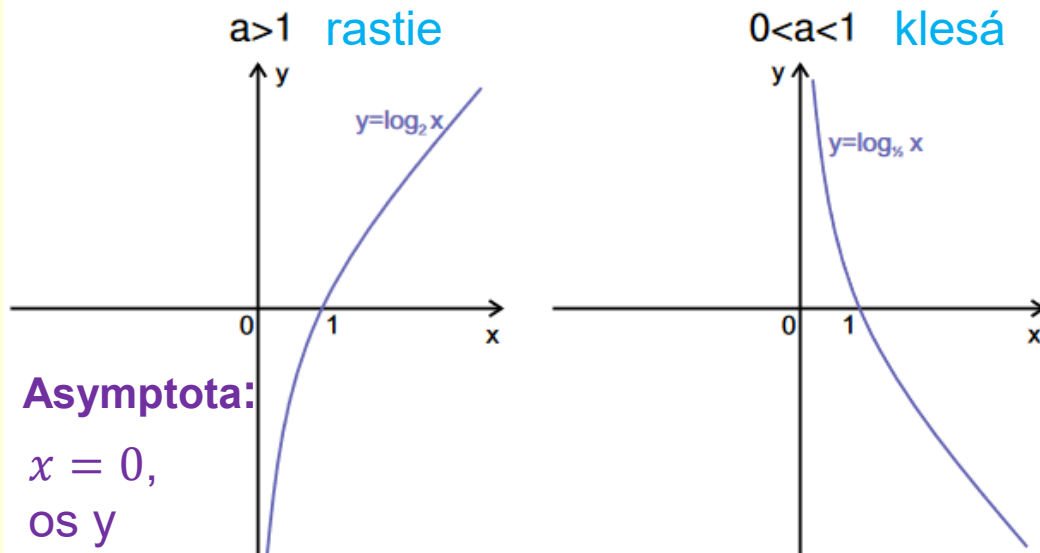
a) $y = -5x^5$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť súradnice vrcholu V .
3. Zvolíme dva body z $D(f)$ a vypočítame y .
4. Viesť krivku cez vrchol a body (z bodu 3).

Elementárne funkcie

Logaritmická funkcia $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$



Číslo a nazývame základ funkcie.

$$D(f) = (0, \infty)$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a x = y \rightarrow a^y = x$$

Pr. 4: Načrtnite grafy funkcií:

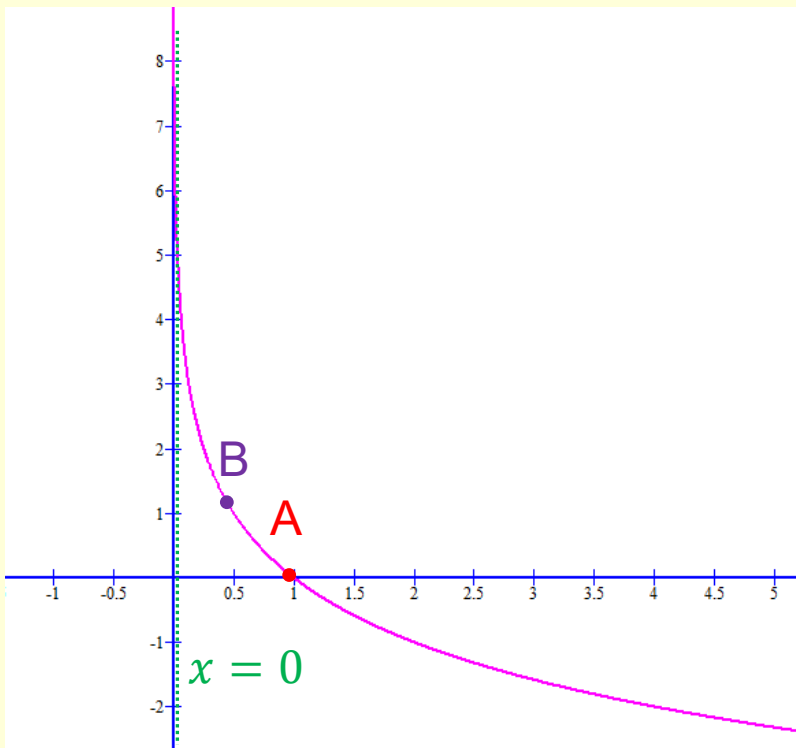
a) $y = \log_2(x + 4)$

b) $y = \log_{0,5} x$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

b) $y = \log_{0,5} x$



$$x > 0$$

$$D(f) = (0, \infty) \quad a = 0,5, \text{ klesá}$$

asymptota: $x = 0$

priesečníky s osou y nemá

priesečníky s osou x:

$$y = 0$$

$$0 = \log_{0,5} x$$

$$0,5^0 = x$$

$$1 = x$$

$$A: y = 0, x = 1$$

zvolíme jeden bod z $D(f)$: $x = 0,5$

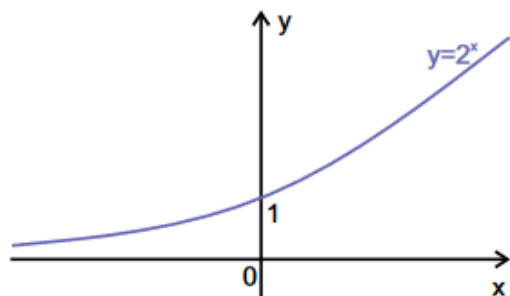
$$y = \log_{0,5} 0,5 = 1$$

$$B: x = 0,5, y = 1$$

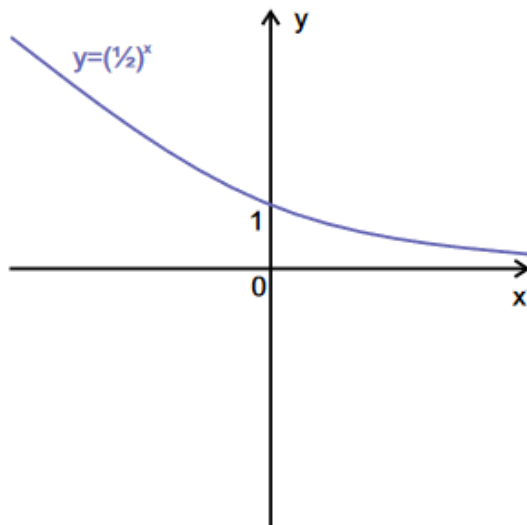
Elementárne funkcie

Exponenciálna funkcia $y = a^x, a > 0, a \neq 1$

$a > 1$ rastie

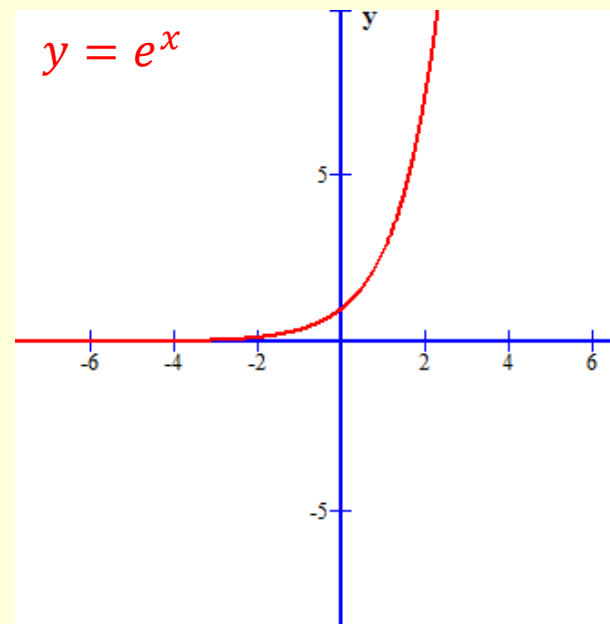


$0 < a < 1$ klesá



Asymptota:

$y = 0$,
os x



Číslo **a** nazývame základ funkcie.

$D(f) = \mathbb{R}$

$$a^0 = 1$$

$$a^x = y \rightarrow \log_a y = x$$

Pr. 5: Načrtnite grafy funkcií:

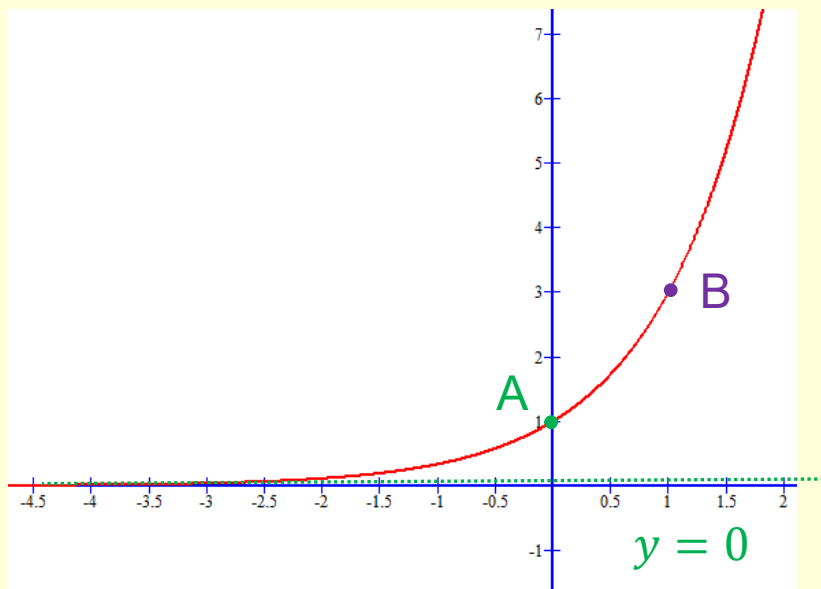
a) $y = 0,2^x - 5$

b) $y = 3^x$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

b) $y = 3^x$



$D(f) = \mathbb{R}$ $a = 3$, rastie

asymptota: $y = 0$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = 3^0$$

$$y = 1$$

A: $x = 0, y = 1$

priesečník s osou x: nemá

ak $y = 0$, potom rovnica $0 = 3^x$
nemá riešenie

zvolíme $x = 1$

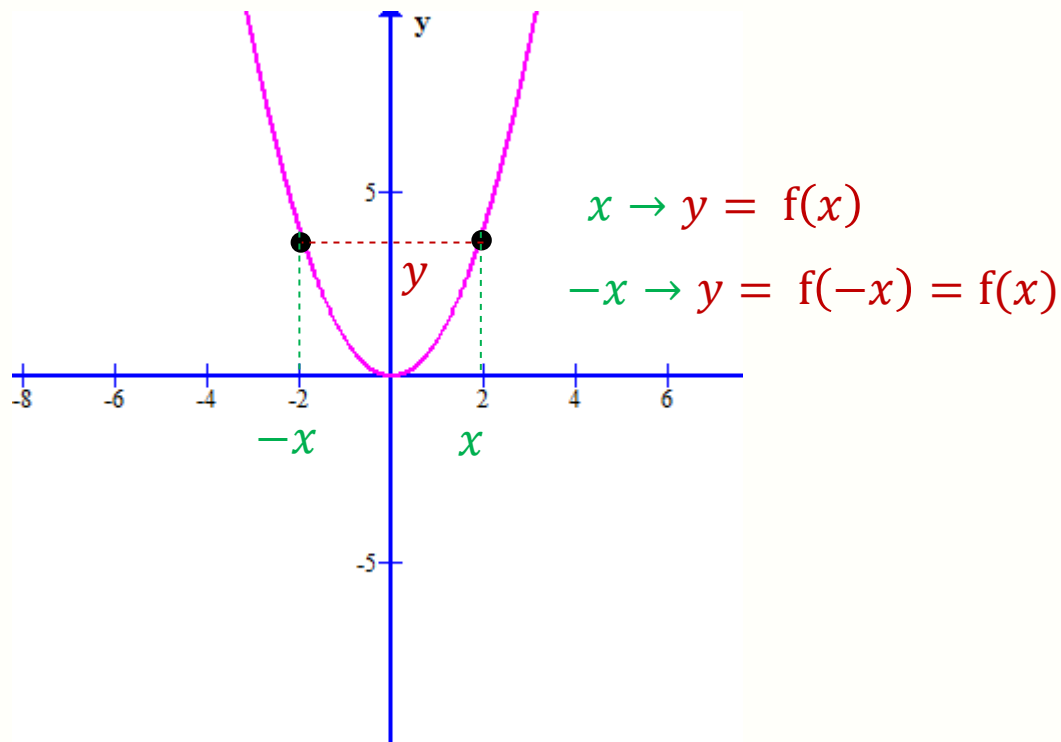
$$y = 3^1 = 3$$

B: $x = 1, y = 3$

Párnosť a nepárnosť funkcie

Párna funkcia:

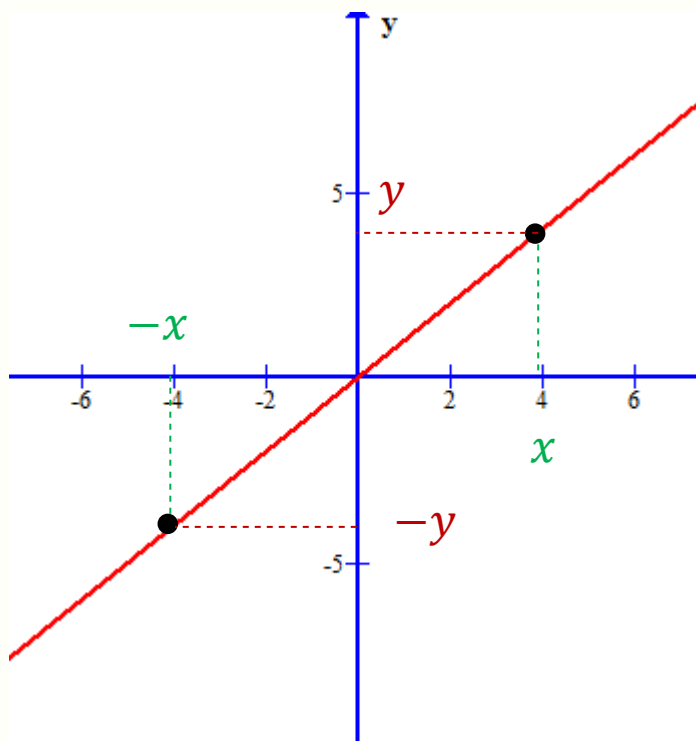
$$x, -x \in D(f), f(x) = f(-x)$$



Graf je súmerný podľa osi y.

nepárna funkcia:

$$x, -x \in D(f), f(-x) = -f(x)$$



$$x \rightarrow y = f(x)$$

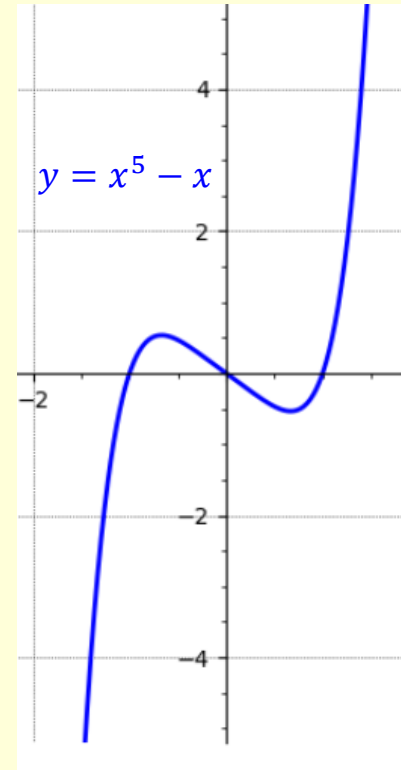
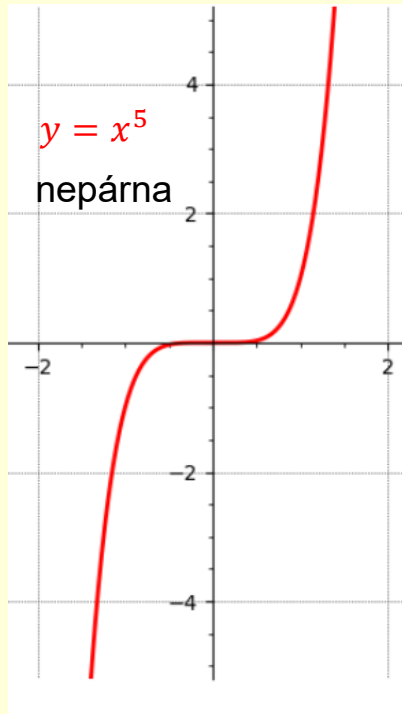
$$\begin{aligned} -x &\rightarrow -y = f(-x) \neq f(x) \\ -y &= f(-x) = -f(x) \end{aligned}$$

Graf je stredovo súmerný podľa bodu (0, 0)

Ani párna ani nepárna funkcia: nespĺňa predchádzajúce podmienky pre párnú a nepárnú funkciu

Pr. 1 – 13 / 1: Vyšetrite párnosť, resp. nepárnosť funkcie

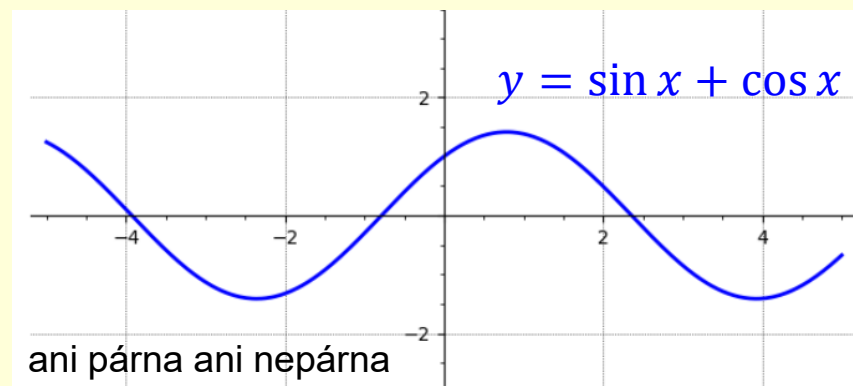
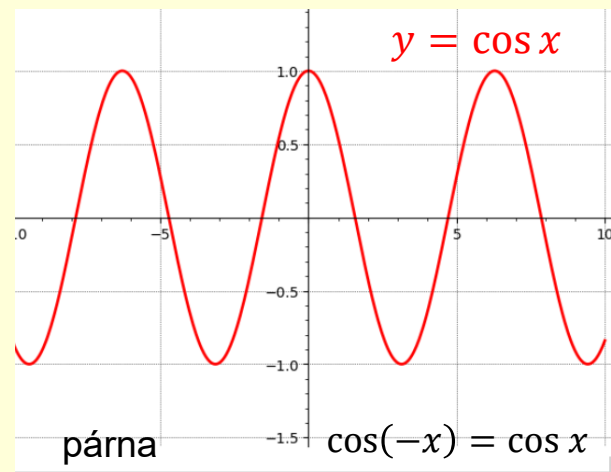
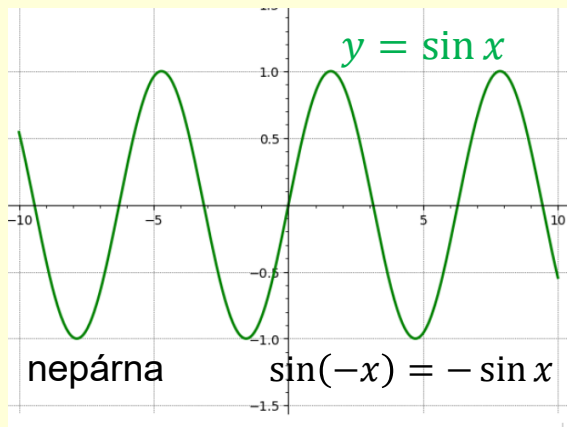
$$f : y = x^5 - x$$



Z grafu vidieť, že funkcia je symetrická podľa počiatku – je nepárna

Pr. 2 – 13 / 3: Vyšetrite párnosť, resp. nepárnosť funkcie

$$f : y = \sin x + \cos x$$



Pr. 3 – 13 / 4: Vyšetrite párnosť, resp. nepárnosť funkcie

$$f : y = \frac{\cos x}{x}$$

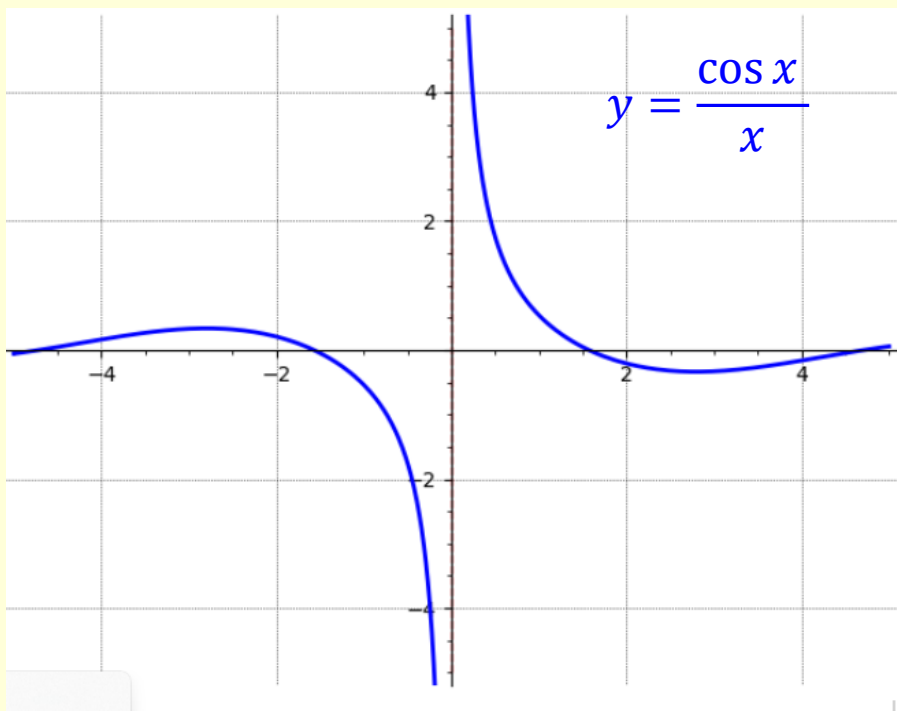
$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x} = -\frac{\cos x}{x}$$

Funkcia kosínus je párna:

$$\cos(-x) = \cos x$$

$f(-x) = -f(x)$ funkcia je nepárna



Z grafu vidieť, že funkcia je symetrická podľa počiatku – je nepárna

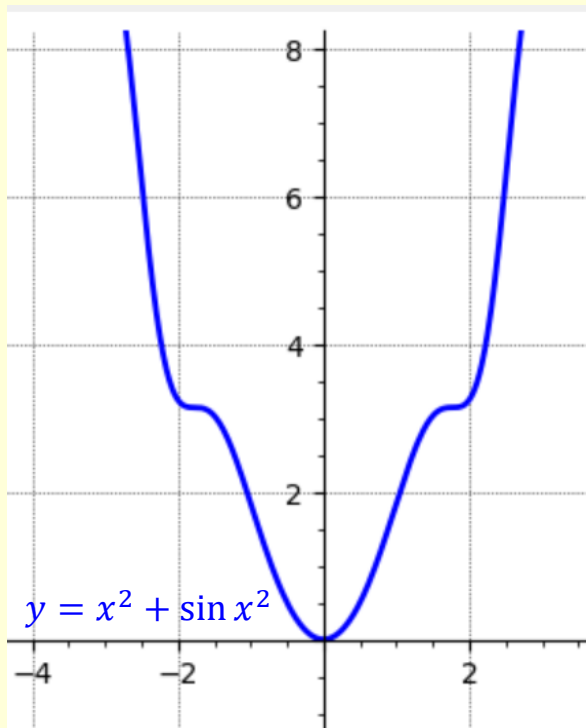
Pr. 4 – 13 / 7: Vyšetrite párnosť, resp. nepárnosť funkcie $f : y = x^2 + \sin x^2$

$$D(f) = R$$

$$f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x)^2 = x^2 + \sin x^2$$

$$f(-x) = f(x) \quad \text{funkcia je párna}$$

Funkcia x^2 je párna:
 $(-x)^2 = x^2$



Z grafu vidieť, že funkcia je symetrická podľa osi y – je párna

Dú: str. 13 / 2, 6, 8, 10

Limita funkcie

Zápis limity:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Pri výpočte limity:

a) dosadíme za neznáme x číslo a , ak **žiadna neurčitost'**, vypočítame limitu

Pr. 1 – 16 / 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$$

Typy neurčitosti: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞

Domáca úloha: Načrtnite grafy funkcií

1. a) $y = 2x - 4$ opísať

b) $y = -3x + 1$

c) $y = 5$

d) $y = 0,25x - 1.$

2. a) $y = 4x^2$

b) $y = x^2 - 2x + 2$ opísať

c) $y = -(x + 3)^2$ opísať

d) $y = (x + 2)^2$

e) $y = x^2 - 4x - 5$

f) $y = x^2 + 1$

i) $y = \frac{1}{2}x^2$

j) $y = 9 - x^2$

3. a) $y = -x^6$

b) $y = 0,6x^3$

c) $y = -0,5x^3 + 4$ opísať

4. a) $y = \log_{0,5}(x + 2)$ opísať

b) $y = \log_3 x$

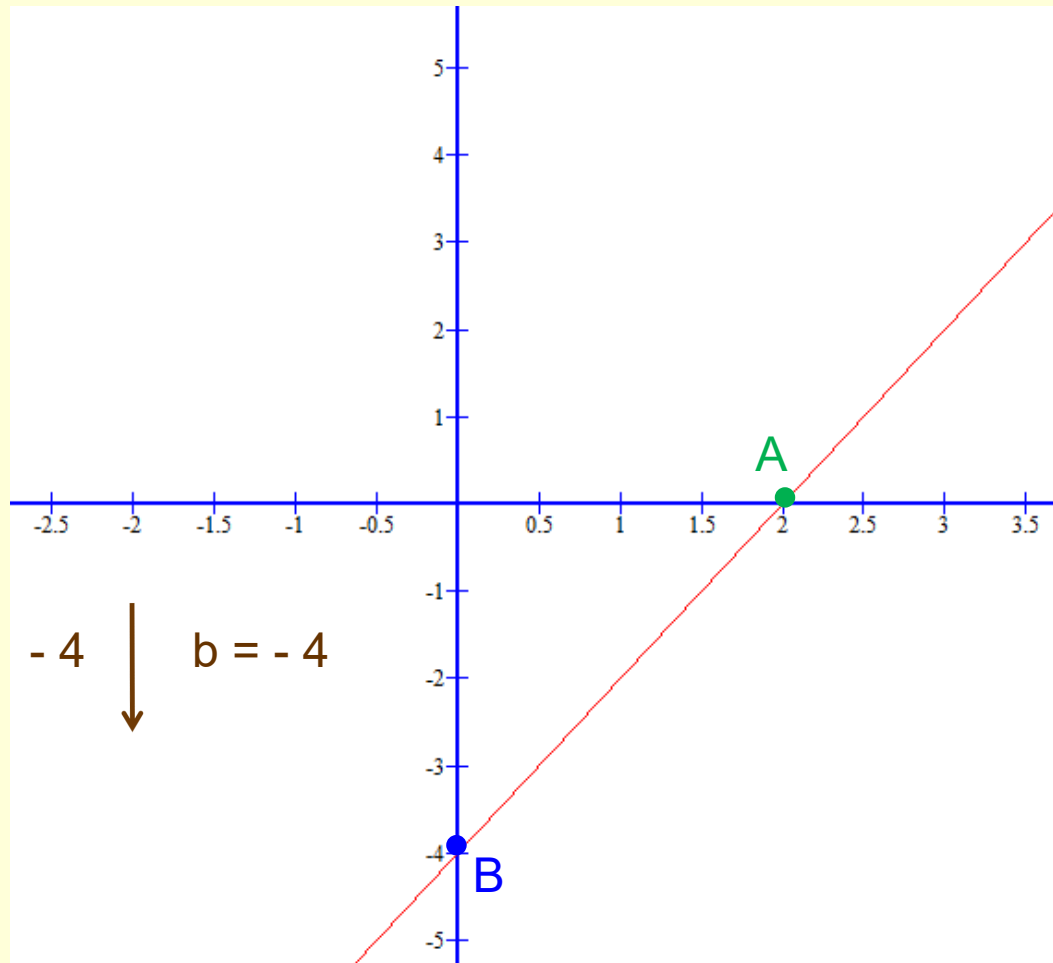
5. a) $y = 4^x + 2$ opísať

b) $y = 2^x - 1$

c) $y = 0,5^x$

**Správnosť nakreslenia grafov
z dú si môžete overiť
pomocou grafov v SageMath,
návod nájdete na
predposlednej snímke.**

1. a) $y = 2x - 4$



$$D(f) = \mathbb{R}$$

priesečník s osou x : ($y = 0$)

$$0 = 2x - 4$$

$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

$$\text{A: } y = 0, x = 2$$

priesečník s osou y : ($x = 0$)

$$y = 2 \cdot 0 - 4$$

$$y = -4$$

$$\text{B: } x = 0, y = -4$$

2. b) $y = x^2 - 2x + 2$

$D(f) = \mathbb{R}$

vrchol:

$$y = x^2 - 2x + 2$$

$$y = (x - 1)^2 + 2 - 1$$

$$y = (x - 1)^2 + 1$$

$$V(1,1)$$

priesečník s osou y :

$$x = 0$$

$$y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2$$

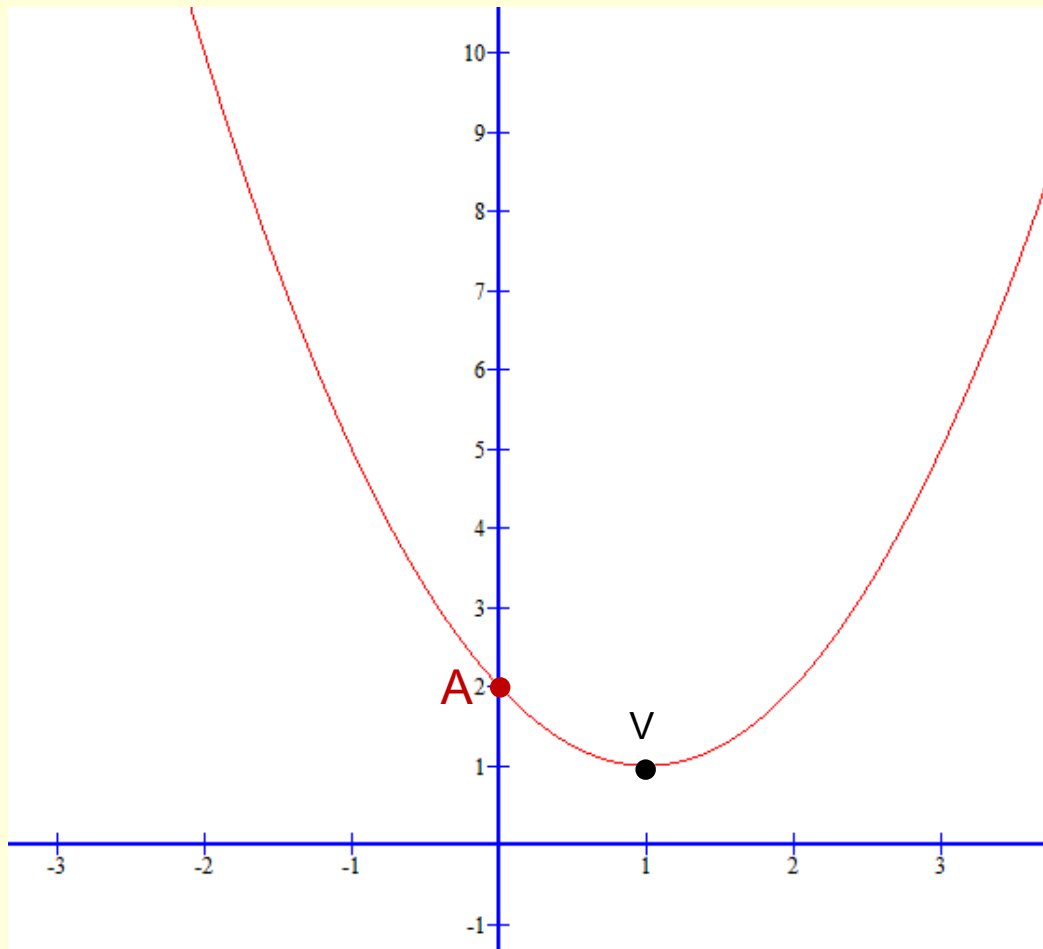
$$y = 2$$

$$A: x = 0, y = 2$$

priesečníky s osou x :

nemá priesečníky s osou x

$D < 0$ (z polohy V vyplýva, že diskriminant nemusíme počítat)



2. c) $y = -(x + 3)^2$

$D(f) = \mathbb{R}$

súradnice vrcholu **V** (m , s)

$V(-3, 0)$

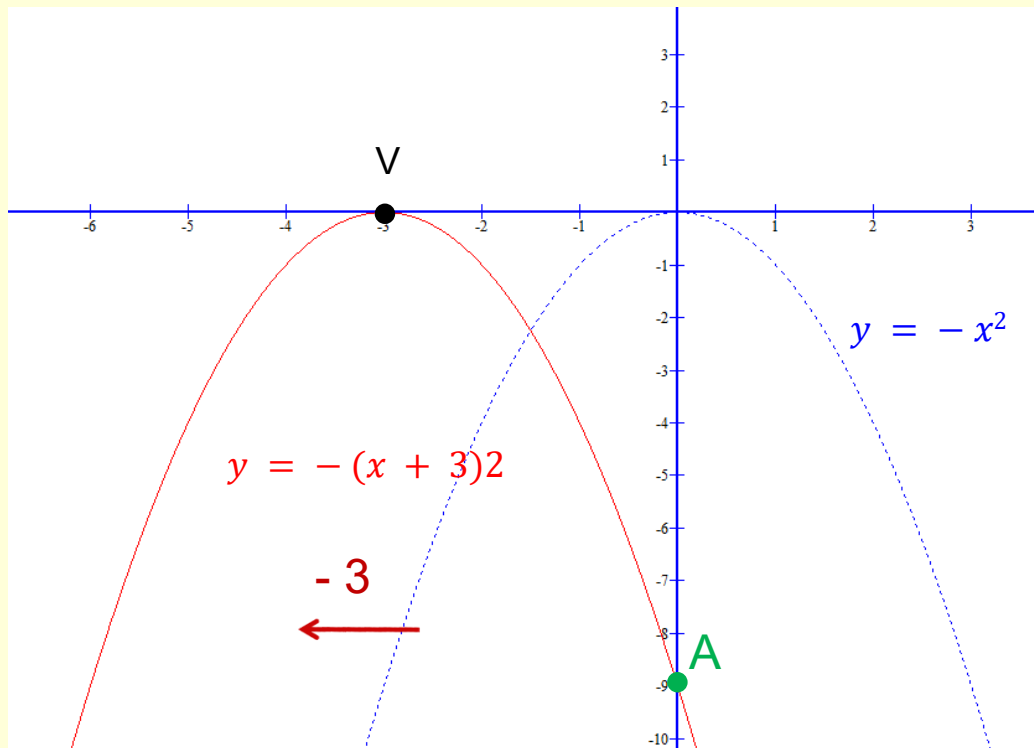
priesečník s osou x : $D = (-6)^2 - [4 \cdot (-1) \cdot (-9)] = 0$
 má jeden vo vrchole V

priesečník s osou y : $x = 0$

$y = -(0 + 3)^2 = -9$

$y = -9$

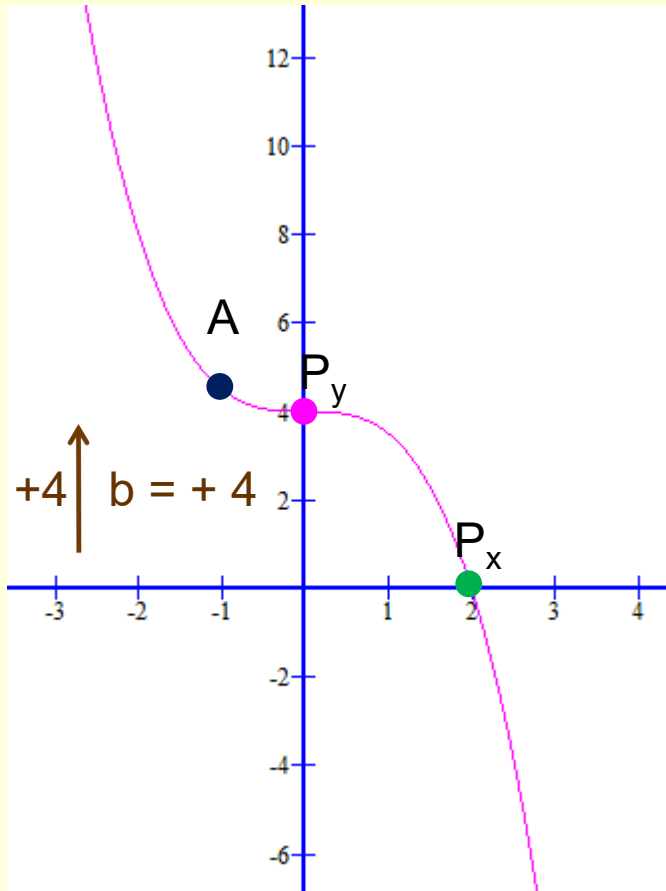
A: $x = 0, y = -9$



Poznámka: $a = -1 < 0$, parabola otočená nadol (smutná), $m = -3$, posun paraboly v smere $-x$

3. c) $y = -0,5x^3 + 4$

$D(f) = \mathbb{R}$



priesečník s osou x:

$$\begin{aligned} P_x : y = 0, \quad 0 &= -0,5 \cdot x^3 + 4 \\ -8 &= x^3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

priesečník s osou y:

$$\begin{aligned} P_y : x = 0, \quad y &= -0,5 \cdot 0 + 4 \\ y &= 4 \quad \text{stred grafu} \end{aligned}$$

voľba bodu A:

$$\begin{aligned} x = -1, \quad y &= -0,5 \cdot (-1)^3 + 4 \\ y &= 0,5 + 4 \\ y &= 4,5 \end{aligned}$$

Poznámka: $a = -0,5 < 0$, *graf klesá*

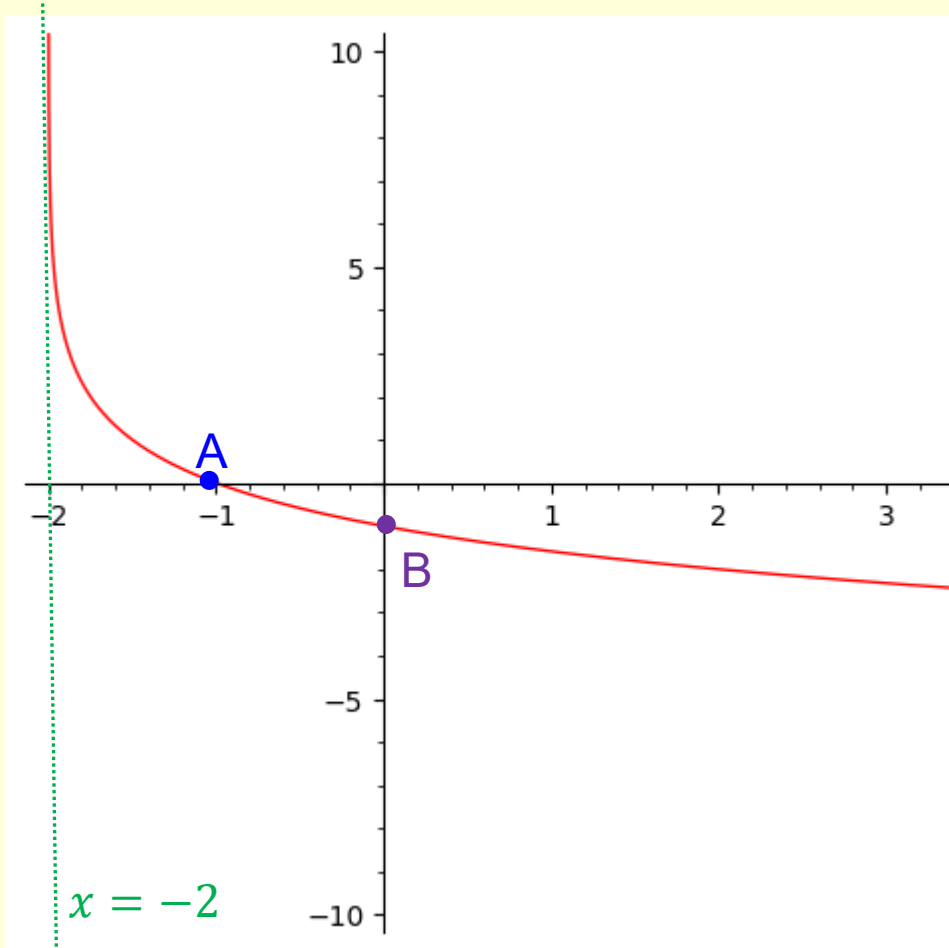
$H(f) = \mathbb{R}$

nie je párna, nie je nepárna - graf nie je symetrický podľa osi y ani podľa počiatku

$$x_1 = 2 \neq x_2 = 0 \quad f(x_1) = 0 \neq f(x_2) = 4 \quad \text{je prostá}$$

nie je ohraničená

4. a) $y = \log_{0,5}(x + 2)$



$$x + 2 > 0$$

$$x > -2$$

$$D(f) = (-2, \infty) \quad a = 0,5, \text{ klesá}$$

asymptota: $x + 2 = 0$

$$x = -2$$

priesečník s osou x: $y = 0$

$$0 = \log_{0,5}(x + 2)$$

$$0,5^0 = x + 2$$

$$1 = x + 2$$

$$A: x = -1, y = 0$$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = \log_{0,5}(0 + 2)$$

$$y = \log_{0,5}(2)$$

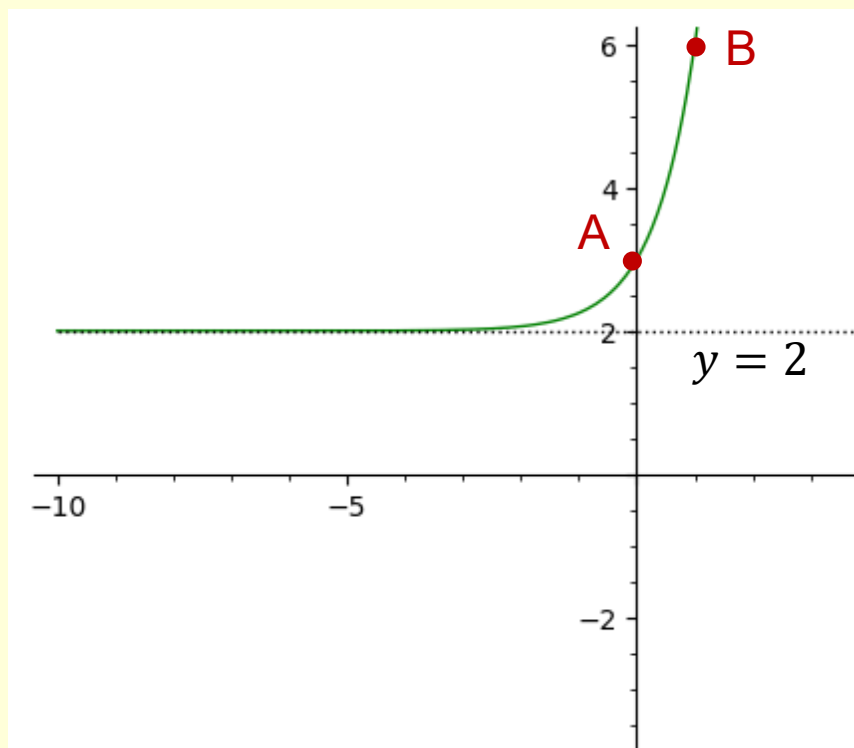
$$0,5^y = 2$$

$$1^y = 1^{-1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$B: y = -1, x = 0$$

5. a) $y = 4^x + 2$



$D(f) = \mathbb{R}$ $a = 4$, rastie

asymptota: $y - 2 = 0$
 $y = 2$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = 4^0 + 2$$

$$y = 1 + 2$$

A: $y = 3, x = 0$

priesečník s osou x: nemá
ak $y = 0$, potom rovnica $0 = 4^x + 2$ nemá riešenie

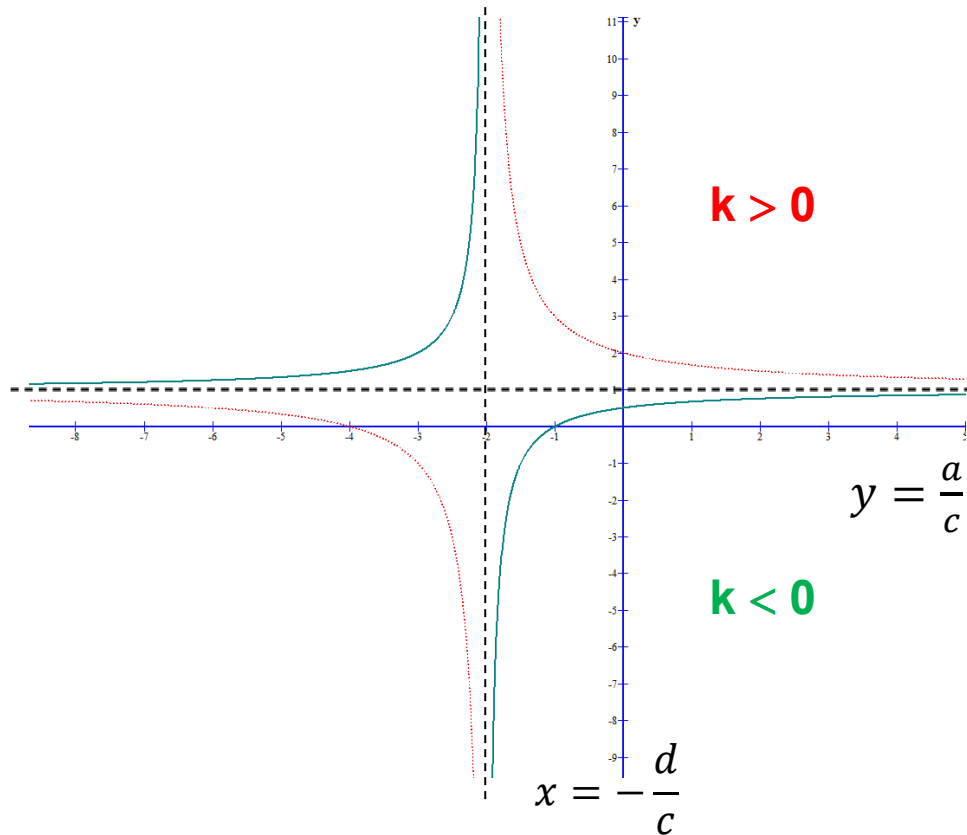
zvolíme $x = 1$

$$y = 4^1 + 2 = 6$$

B: $x = 1, y = 6$

Elementárne funkcie

Lomená funkcia $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $a, b, c, d \in R$



$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y = \frac{k}{x-m} + s$$

Asymptoty:

$$x = m = -\frac{d}{c} \quad \text{posun na osi } x$$

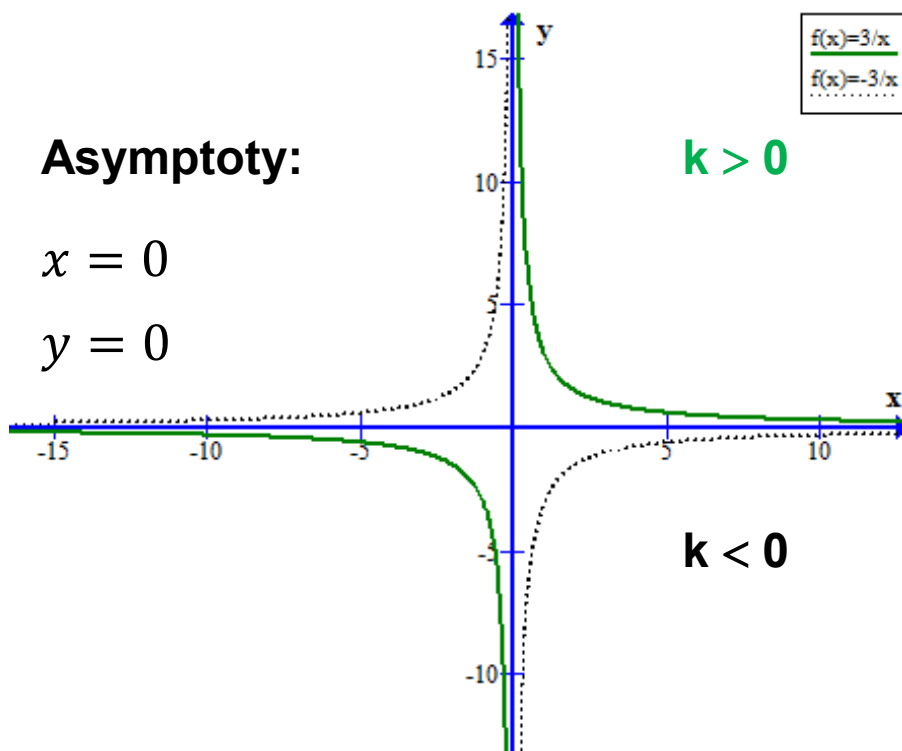
$$y = s = \frac{a}{c} \quad \text{posun na osi } y$$

Grafom je hyperbola. $D(f) = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

Elementárne funkcie

Lomená funkcia – nepriama úmernosť

$$y = \frac{k}{x} \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$



Grafom je hyperbola. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Pr. 6: Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = \frac{-3}{x}$

Postup pri zostrojovaní grafu:

b) $y = \frac{-2}{x+2}$

c) $y = \frac{2x}{x+1}$

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť polohu asymptót.
3. Vypočítať pre jeden zvolený bod z $D(f)$ jeho y a viesť ním rameno hyperboly.
4. Symetricky viesť druhé rameno hyperboly v protiľahlom kvadrante.

$$a) \quad y = \frac{-3}{x}$$

$$x \neq 0$$

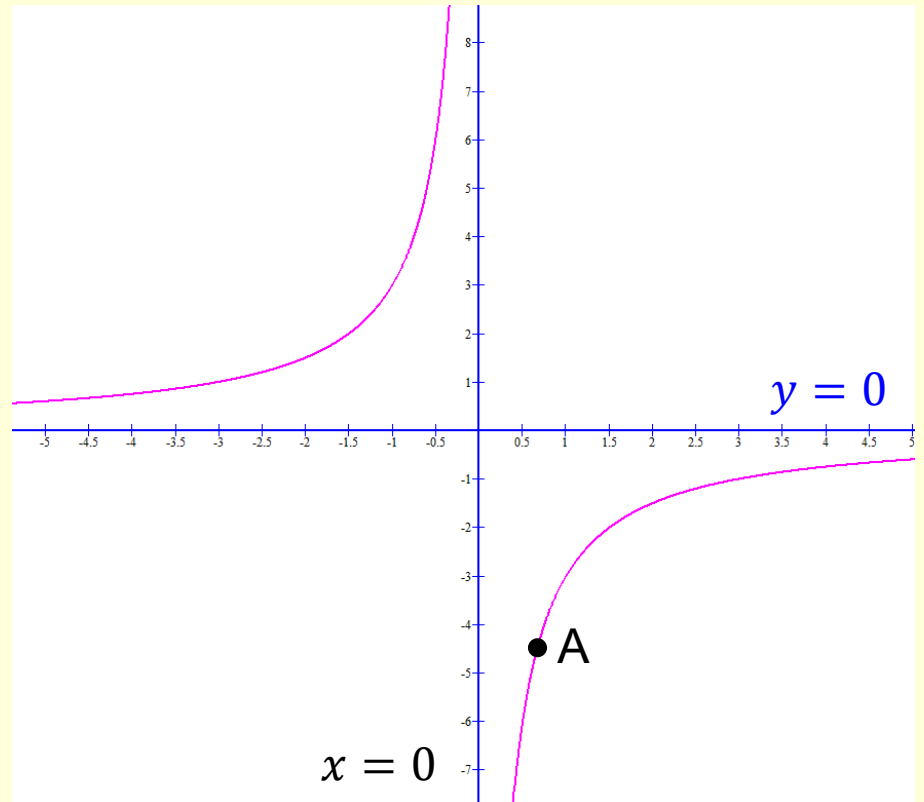
$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asymptoty: typ $y = \frac{k}{x}$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$A: x = 1, y = \frac{-3}{1} = -3$$



$$\text{b)} \quad y = \frac{-2}{x+2}$$

$$x + 2 \neq 0$$

$$x \neq -2$$

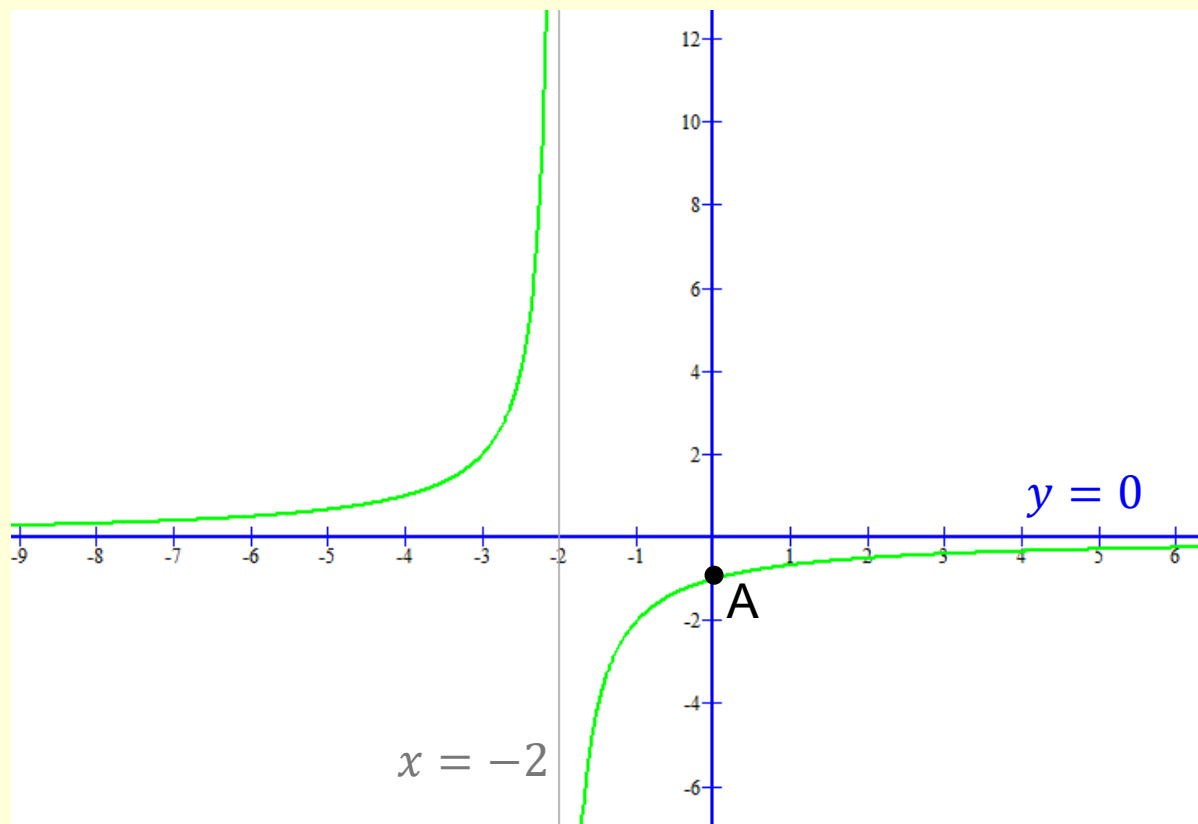
$$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

Asymptoty:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$y = \frac{a}{c} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{A: } x = 0, y = \frac{-2}{0+2} = -1$$



$$c) y = \frac{2x}{x+1}$$

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

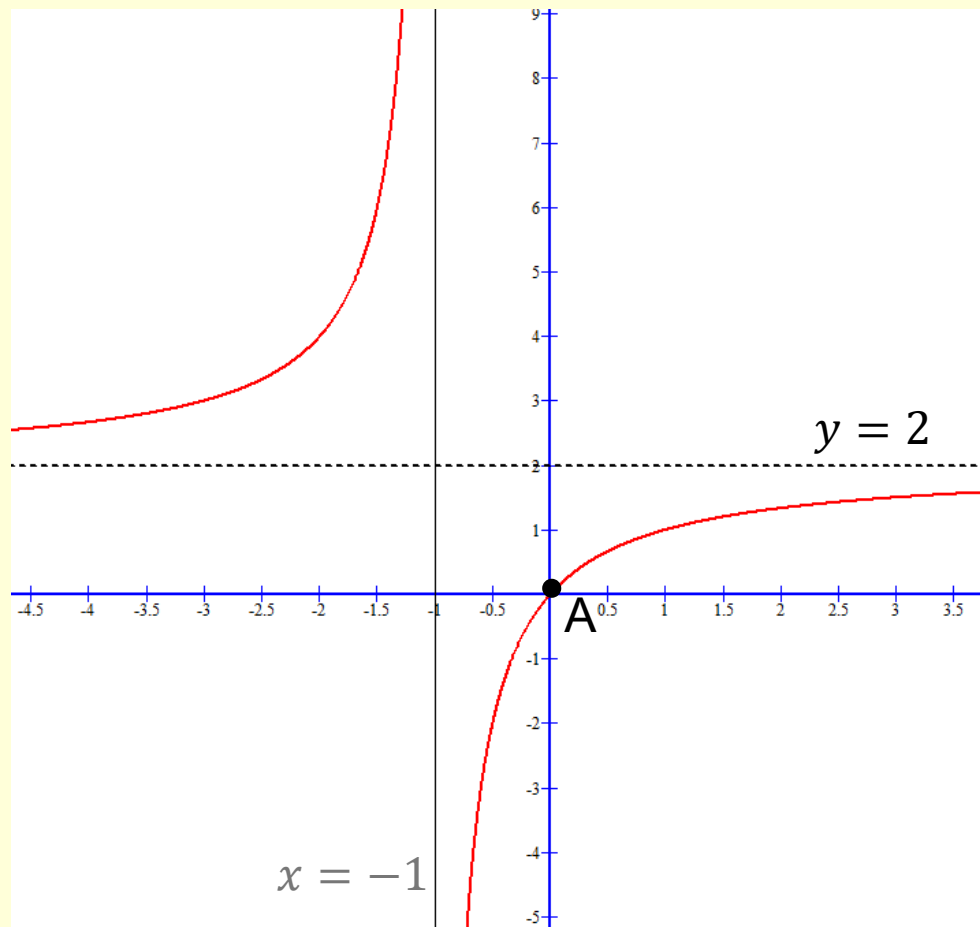
$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Asymptoty:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

$$A: x = 0, y = \frac{0}{0+1} = 0$$



Na stránke <https://feimat.azurewebsites.net> kde sa prihláste ako **Host'**.
Otvorte si časť **Graf funkcie a jeho vlastnosti**– čítať viac.

Návod na použitie Sage pri zobrazení grafov:

- nakopírujte kód z ľavej lišty (Graf) a vložte do okna SageMath kód
- pre zobrazenie riešenia stlačte Evaluate (zobrazí sa riešenie pre 1. úlohu)
- pre **zobrazenie grafov z dŭ** vložte do bunky pre vlastnú funkciu rovnicu upravenú pre Sage.

Pre zmazanie pôvodného kódu v políčku SageMath kód označte pôvodný text (kliknite na ľubovoľné miesto v kóde) a stlačte **CTRL + A** a potom **DELETE**. Potom vložte nový nakopírovaný kód a postupujte podľa návodu (body 1–3).

Ak máte problémy so Sage kódom, odporúčame použiť [pomocníka](#).

Poznámka: ak sa Vám nezobrazí celý graf danej funkcie zmeňte oblasť zobrazenia súradníc pomocou xmin, xmax, ymin, ymax

Zápis funkcií v Sage kóde: na d'aľšej snímke

Zápis funkcií v Sage kóde:

<u>lineárna funkcia:</u>	$a*x+b$
<u>kvadratická funkcia:</u>	$a*x^2+b*x+c$
<u>mocninová funkcia:</u>	$a*x^n$
<u>gonimetrická funkcia:</u>	$\sin(x)$, $\cos(x)$
<u>lomená funkcia:</u>	$(a*x+b)/(c*x+d)$
<u>logaritmická funkcia:</u>	$\log(x, \text{základ})$
<u>exponenciálna funkcia:</u>	a^x
<u>funkcia arcsin , arccos:</u>	$\text{asin}(x)$, $\text{acos}(x)$

napr: $5*x-8$
napr. $2*x^2-3*x+5$
napr. $0.5*x^3$
napr. $\sin(x*x)$
napr. $(2*x)/(5*x-1)$
napr. $\log(x, 0.5)$
napr. 3^x
napr. $5*x-8$

Ohodnot'ite vytvorenú stránku: otvorte menu a choďte do časti **Spätná väzba**

