Relácie a inverzné relácie

Nech X, Y sú ľubovoľné množiny. Binárna relácia R z X do Y je akákoľvek podmnožina kartézskeho súčinu $X \times Y$. Vo vzťahu k relácii $R \subseteq X \times Y$ označujeme X ako množinu vzorov a Y ako množinu obrazov. Inverzná relácia k R je relácia R^{-1} z Y do X

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$

- ostrej relácii $R \subseteq X \times Y$ odpovedá funkcia príslušnosti $\mu_R : X \times Y \to \{0, 1\}$ pričom

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pre } (x, y) \in R, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

- inverzná relácia $R^{-1} \subseteq Y \times X$ má funkciu príslušnosti

$$\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$$

Zložená relácia

Nech X, Y, Z sú ľubovoľné množiny. Zložená relácia z relácií $R \subseteq X \times Y$ a $S \subseteq Y \times Z$ je relácia $R \circ S$ z X do Z s predpisom

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times Z : (\exists y \in Y : (x, y) \in R, (y, z) \in S)\}.$$

Zložené zobrazenie resp. zložená funkcia

Nech $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ sú ľubovoľné zobrazenia (funkcie). Zobrazenie (funkcia) $f \circ g$ sa nazýva zloženým zobrazením (funkciou) resp. kompozíciou z X do Z s predpisom $f \circ g(x) = g(f(x))$, t. j. najprv sa aplikuje f, potom g.

Identické zobrazenie resp. identická funkcia

Nech X je ľubovoľná množina. Zobrazenie (funkcia) $\varphi : X \to X$ sa nazýva identickým zobrazením (funkciou) resp. identitou ak

$$\forall x \in X : \quad \varphi(x) = x.$$

Fuzzy relácia

Nech X, Y sú ľubovoľné množiny. Fuzzy relácia R z X do Y je ľubovoľná fuzzy množina $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, t. j. je daná funkciou príslušnosti

$$\mu_R : X \times Y \to \langle 0, 1 \rangle.$$

Hodnota $\mu_R(x, y)$ vyjadruje stupeň, v akom je prvok x v relácii s prvkom y.

- ostrá relácia je špeciálnym prípadom fuzzy relácie, keď μ_R nadobúda len hodnoty 0 a 1
- inverzná fuzzy relácia $R^{-1} \in \mathcal{F}(Y \times X)$ má funkciu príslušnosti

$$\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$$

Zložená fuzzy relácia

Nech $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ sú fuzzy relácie a $\wedge$ je fuzzy konjunkcia. Zložená fuzzy relácia $R \circ S \in \mathcal{F}(X \times Z)$ je daná funkciou príslušnosti

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y} \mu_R(x, y) \dot{\wedge} \mu_S(y, z).$$

- pre $\wedge = \min$ hovoríme o sup-min kompozícii, pre súčin o sup-súčin kompozícii
- pre ostré relácie R, S dostaneme zloženú reláciu z predchádzajúceho slajdu (nezávisle od voľby $\wedge$)
- pre fuzzy relácie výsledok od voľby fuzzy konjunkcie závisí

Kroneckerova delta

Na množine X relácii rovnosti $E = \{(x, x) : x \in X\}$ odpovedá funkcia príslušnosti

$$\mu_E(x, y) = \sigma(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x = y, \\ 0 & \text{pre } x \neq y. \end{cases}$$

- relácia rovnosti je neutrálnym prvkom skladania: pre $R \subseteq X \times Y$ platí

$$E_X \circ R = R = R \circ E_Y,$$

kde E_X, E_Y sú relácie rovnosti na X, resp. Y

- základnou myšlienkou princípu rozšírenia je umožňiť aplikovanie funkcií a operácií na fuzzy množinách

- zobrazenie je binárna relácia $R \subseteq X \times Y$, pre ktorú platí:

  pre každý prvok z X existuje práve jeden prvok

  $$y = f(x) \in Y \text{ taký, že } (x, y) \in R$$

- na zobrazenie $f : X \to Y$ sa tým môžeme pozerať ako na reláciu $R \subseteq X \times Y$ s uvedenou vlastnosťou
- zápis $(x, y) \in R$ je ekvivalentný s $y = f(x)$
- taktiež $R = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, hovoríme, že R je grafom zobrazenia f

Rozšírenie binárnych relácií

Nech $R \subseteq X \times Y$ je ľubovoľná relácia (nemusí byť zobrazenie). Zobrazenie $r : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, ktoré každej množine $A \subseteq X$ priradí množinu $B \subseteq Y$ podľa predpisu

$$r(A) = \{y \in Y : (\exists x \in A : (x, y) \in R)\}$$

nazývame rozšírením relácie R. Analogicky zobrazenie $r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definované vzťahom

$$r^{-1}(B) = \{x \in X : (\exists y \in B : (x, y) \in R)\}$$

nazývame rozšírením relácie R^{-1}.

- rozšírenia r a r^{-1} nemusia byť vzájomne inverzné, a tým $r \circ r^{-1}$ alebo $r^{-1} \circ r$ nemusí byť identita

Vlastnosti rozšírení

Nech $R \subseteq X \times Y$ je ľubovoľná relácia a $A, A_1, A_2 \subseteq X$. Potom

- $r(\emptyset) = \emptyset$,
- $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow r(A_1) \subseteq r(A_2)$,
- $r(A_1 \cup A_2) = r(A_1) \cup r(A_2)$,
- $r(A_1 \cap A_2) \subseteq r(A_1) \cap r(A_2)$, rovnosť vo všeobecnosti neplatí.

Analogické vlastnosti má aj rozšírenie r^{-1}.

Rozšírenie zloženej relácie

Pre relácie $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ s rozšíreniami r, s je rozšírením relácie $R \circ S$ zobrazenie $r \circ s$, t. j. $A \mapsto s(r(A))$.

Kedy sú $r \circ r^{-1}$ a $r^{-1} \circ r$ identitami

Nech $R \subseteq X \times Y$ je ľubovoľná relácia. Potom

- $r \circ r^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(X)}$ práve vtedy, keď $R \circ R^{-1} = E_X$, t. j. každý prvok $x \in X$ má aspoň jeden obraz a obrazy rôznych prvkov sú disjunktné,
- $r^{-1} \circ r = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(Y)}$ práve vtedy, keď $R^{-1} \circ R = E_Y$, t. j. každý prvok $y \in Y$ má aspoň jeden vzor a každý jeho vzor má jediný obraz y.

Špeciálne pre zobrazenie $f : X \to Y$

- $A \subseteq r^{-1}(r(A))$ a $r(r^{-1}(B)) \subseteq B$ pre všetky $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$,
- $r \circ r^{-1}$ je identita práve vtedy, keď f je injektívne,
- $r^{-1} \circ r$ je identita práve vtedy, keď f je surjektívne.

Rozšírenie binárnych relácií na fuzzy množiny

Nech $R \subseteq X \times Y$ je ostrá relácia a $\overset{\cdot}{\wedge}$ je fuzzy konjunkcia.

Zobrazenie $r : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$, ktoré každej fuzzy množine $A \in \mathcal{F}(X)$ priradí fuzzy množinu $r(A) \in \mathcal{F}(Y)$ s funkciou príslušnosti

$$\mu_{r(A)}(y) = \sup_{x \in X} \mu_R(x, y) \overset{\cdot}{\wedge} \mu_A(x)$$

nazývame rozšírením relácie R. Analogicky zobrazenie $r^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ definované vzťahom

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in Y} \mu_R(x, y) \overset{\cdot}{\wedge} \mu_B(y)$$

nazývame rozšírením relácie R^{-1}.

- na voľbe fuzzy konjunkcie $\overset{\cdot}{\wedge}$ nezáleží pre ostrú reláciu R, lebo $0 \overset{\cdot}{\wedge} a = 0$ a $1 \overset{\cdot}{\wedge} a = a$

Princíp rozšírenia pre zobrazenie

Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie a $A \in \mathcal{F}(X)$. Obraz fuzzy množiny A je fuzzy množina $f(A) \in \mathcal{F}(Y)$ s funkciou príslušnosti

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup\left\{\mu_A(x) : x \in X,\ f(x) = y\right\},$$

pričom $\sup \emptyset = 0$. Vzor fuzzy množiny $B \in \mathcal{F}(Y)$ je fuzzy množina $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}(X)$ s funkciou príslušnosti

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x)).$$

- ide o špeciálny prípad predchádzajúceho slajdu, keď R je grafom zobrazenia f
- ak má y viac vzorov, berieme najväčšiu z ich príslušností; ak nemá žiadny vzor, je $\mu_{f(A)}(y) = 0$

Princíp rozšírenia pre zobrazenia viacerých premenných

Nech $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ je zobrazenie a $A_i \in \mathcal{F}(X_i)$ pre $i = 1, \ldots, n$. Obraz fuzzy množín $A_1, \ldots, A_n$ je fuzzy množina $f(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{F}(Y)$ s funkciou príslušnosti

$$\mu_{f(A_1,\ldots,A_n)}(y) = \sup_{\substack{(x_1,\ldots,x_n) \\ f(x_1,\ldots,x_n)=y}} \min\left\{\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\right\},$$

pričom $\sup \emptyset = 0$.

- pre $n = 1$ dostávame princíp rozšírenia z predchádzajúceho slajdu
- takto sa na fuzzy množiny prenášajú binárne operácie, napr. súčet $A_1 \oplus A_2$ pre $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, čo je základom fuzzy aritmetiky