Rozšírenia binárnych relácií

Označenie a použité vlastnosti:

- **Binárna relácia** z X do Y je ľubovoľná množina $R \subseteq X \times Y$; X je množina **vzorov**, Y množina **obrazov**. **Inverzná relácia** je $R^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in R\}$.
- Relácia $R \subseteq X \times Y$ je **zobrazením** $r : X \to Y$, ak ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y = r(x)$ s $(x,y) \in R$.
- **Zloženie zobrazení:** $f \circ g(x) = g(f(x))$, t.j. najprv f, potom g. Preto $r \circ r^{-1}$ je zobrazenie $A \mapsto r^{-1}(r(A))$ na $\mathcal{P}(X)$ a $r^{-1} \circ r$ je zobrazenie $B \mapsto r(r^{-1}(B))$ na $\mathcal{P}(Y)$. Zobrazenie $\varphi : X \to X$ je **identita**, ak $\varphi(x) = x$ pre všetky $x \in X$.
- **Rozšírenie relácie** R je zobrazenie $r : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$,

  $$r(A) = \{y \in Y : \ \exists x \in A : \ (x,y) \in R\},$$

  a **rozšírenie inverznej relácie** je $r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$,

  $$r^{-1}(B) = \{x \in X : \ \exists y \in B : \ (x,y) \in R\}.$$

  Zobrazenia r a r^{-1} nemusia byť navzájom inverzné.
- **Kritériá identít:** pre ľubovoľnú reláciu R platí
  - $r \circ r^{-1} = \mathrm{id}$ práve vtedy, keď každý prvok $x \in X$ má aspoň jeden obraz a obrazy rôznych prvkov sú disjunktné;
  - $r^{-1} \circ r = \mathrm{id}$ práve vtedy, keď každá hodnota $y \in Y$ má aspoň jeden vzor a každý jej vzor má jediný obraz y.

  Ak je R grafom zobrazenia f, predpisy sa zjednodušia na $r(A) = \{f(x) : x \in A\}$ a $r^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$, prvé kritérium znamená, že f je injektívna, a druhé, že f je surjektívna. Obe identity teda platia práve vtedy, keď R je grafom bijekcie.
- **Rozšírenie na fuzzy množiny:** pre ostrú reláciu $R \subseteq X \times Y$ je $r : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ a $r^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$,

  $$\mu_{r(A)}(y) = \sup_{x \in X} \big[\mu_R(x,y) \wedge \mu_A(x)\big], \qquad \mu_{r^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in Y} \big[\mu_R(x,y) \wedge \mu_B(y)\big],$$

  pričom voľba fuzzy konjunkcie $\wedge$ nemá vplyv. Teda $\mu_{r(A)}(y) = \sup\{\mu_A(x) : (x,y) \in R\}$, kde $\sup \emptyset = 0$.
- **Princíp rozšírenia** pre funkciu $f : X \to Y$ (relácia $R = \{(x, f(x)) : x \in X\}$):

  $$\mu_{f(A)}(y) = \sup\{\mu_A(x) : \ x \in X, \ f(x) = y\}.$$

Zadania úloh

Príklad 1: Rozšírenie zobrazenia

Nech $X = \{a,b,c\}$, $Y = \{0,1\}$ a $\mu_R = \{(a,1),(b,1),(c,0)\}$. Nájdite obrazy rozšírenia r relácie R a vzory rozšírenia r^{-1} relácie R^{-1}. Zistite, či sú zobrazenia $r \circ r^{-1}$ a $r^{-1} \circ r$ identitami.

Príklad 2: Rozšírenie zobrazenia

Nech $X = \{a, b, d\}$, $Y = \{0, 0.5, 1\}$ a $\mu_R = \{(a, 1), (b, 0), (d, 0.5)\}$. Nájdite obrazy rozšírenia r relácie R a vzory rozšírenia r^{-1} relácie R^{-1}. Zistite, či sú zobrazenia $r \circ r^{-1}$ a $r^{-1} \circ r$ identitami.

Príklad 3: Rozšírenie zobrazenia

Nech $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 0.5, 1\}$ a $\mu_R = \{(a, 0.5), (b, 0), (c, 0.5)\}$. Nájdite obrazy rozšírenia r relácie R a vzory rozšírenia r^{-1} relácie R^{-1}. Zistite, či sú zobrazenia $r \circ r^{-1}$ a $r^{-1} \circ r$ identitami.

Príklad 4: Rozšírenie zobrazenia

Nech $X = \{b, c, d, e\}$, $Y = \{0, 0.3, 0.6, 0.9, 1\}$ a $\mu_R = \{(b, 0.3), (c, 0.9), (d, 1), (e, 0)\}$. Nájdite obrazy rozšírenia r relácie R a vzory rozšírenia r^{-1} relácie R^{-1}. Zistite, či sú zobrazenia $r \circ r^{-1}$ a $r^{-1} \circ r$ identitami.

Príklad 5: Rozšírenie relácie

Nech $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 0.5, 1\}$ a $R = \{(a, 0), (a, 0.5), (b, 1)\}$. Nájdite obrazy rozšírenia r relácie R a vzory rozšírenia r^{-1} relácie R^{-1}. Zistite, či sú zobrazenia $r \circ r^{-1}$ a $r^{-1} \circ r$ identitami.

Príklad 6: Rozšírenie relácie

Nech $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 0.3, 0.6, 1\}$ a $R = \{(a, 0), (a, 0.6), (b, 0.3), (c, 1)\}$. Nájdite obrazy rozšírenia r relácie R a vzory rozšírenia r^{-1} relácie R^{-1}. Zistite, či sú zobrazenia $r \circ r^{-1}$ a $r^{-1} \circ r$ identitami.

Príklad 7: Rozšírenie relácie

Nech $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{0, 1\}$ a $R = \{(a, 1), (b, 0), (c, 1)\}$. Nájdite obrazy rozšírenia r relácie R a vzory rozšírenia r^{-1} relácie R^{-1}. Zistite, či sú zobrazenia $r \circ r^{-1}$ a $r^{-1} \circ r$ identitami.

Príklad 8: Rozšírenie relácie

Nech $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{0, 0.2, 0.7, 1\}$ a $R = \{(c, 0), (a, 0.7), (d, 0.2), (b, 1)\}$. Nájdite obrazy rozšírenia r relácie R a vzory rozšírenia r^{-1} relácie R^{-1}. Zistite, či sú zobrazenia $r \circ r^{-1}$ a $r^{-1} \circ r$ identitami.

Príklad 9: Konštrukcia relácie

Nech $X = \{a, b, c\}$ a $Y = \{0, 0.3, 0.6, 1\}$.

(a) Nájdite reláciu $R \subseteq X \times Y$, ktorá nie je zobrazením, takú, že $r \circ r^{-1}$ je identita a $r^{-1} \circ r$ nie je.

(b) Existuje relácia $R \subseteq X \times Y$, ktorá nie je zobrazením, taká, že $r^{-1} \circ r$ je identita? Zdôvodnite.

Príklad 10: Obraz fuzzy množiny pri relácii

Nech $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 0.5, 1\}$ a $R = \{(a, 0), (a, 0.5), (b, 1)\}$ je relácia z príkladu 5. Na X je daná fuzzy množina $\mu_E = \{(a, 0.8), (b, 0.3), (c, 1)\}$. Nájdite obraz fuzzy množiny E pri relácii R, t. j. fuzzy množinu na Y s funkciou príslušnosti $\mu(y) = \sup\{\mu_E(x) : (x, y) \in R\}$, kde $\sup \emptyset = 0$.

Príklad 11: Princíp rozšírenia na konečnom univerze

Na univerzu $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ je daná fuzzy množina

$$\mu_D = \{(-2, 0.2), (-1, 0.6), (0, 1), (1, 0.5), (2, 0.9)\}.$$

Zobrazte D funkciou $f(x) = x^2$.

Príklad 12: Princíp rozšírenia na $\mathbb{R}$

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ je daná fuzzy množina

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{pre } x \in \langle -1,\ 1 \rangle, \\ \dfrac{3-x}{2} & \text{pre } x \in (1,\ 3\rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Zobrazte A nasledujúcimi funkciami:

(a) unárna $-$,

(b) druhá mocnina.

Príklad 13: Princíp rozšírenia na $\mathbb{R}$

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ je daná fuzzy množina

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} & \text{pre } x \in \langle 1,\ 4 \rangle, \\ \dfrac{7-x}{3} & \text{pre } x \in (4,\ 7\rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Zobrazte B nasledujúcimi funkciami:

(a) druhá odmocnina,

(b) štvrtá mocnina.

Príklad 14: Princíp rozšírenia na ohraničenom univerze

Na univerzu $X = \langle -3,\ 3 \rangle$ je daná fuzzy množina

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x} & \text{pre } x \in \langle 0,\ 1 \rangle\,, \\ 5 - 4x & \text{pre } x \in (1,\ 1.25 \rangle\,, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Zobrazte C nasledujúcimi funkciami:

(a) druhá mocnina,

(b) štvrtá mocnina.

Príklad 15: Princíp rozšírenia na $\mathbb{R}$

Fuzzy množinu B z príkladu 13 zobrazte funkciou $f(x) = (x-3)^2$.