

Prednáška č. 4 pokračovanie limita funkcie + spojitosť funkcie

pondelok 5. októbra 2026 9:19

Veta

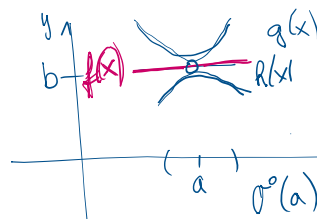
Nech existuje $O_0^o(a)$ také, že $\forall x \in O_0^o(a)$ platí, že $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, tak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

VZŤAHI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \leftarrow \text{platí}$$

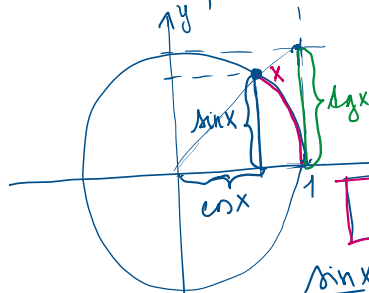
ukážeme, že platí

veta o policajloch



nech $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$

príklad: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1$ použijeme vetať



$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\Delta g x}{1}$$

ukážeme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

platí geom. výř.

$$\sin x \leq x \leq \Delta g x$$

pre $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\frac{1}{\sin x} \neq 0$
 $\sin x > 0$

$$\frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\Delta g x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

pre $x \in (0, \frac{\pi}{2})$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$

keda platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

oproti tomu: podobne sa ukáže aj $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$, keda platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

príklad: ① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7 = 1 \cdot 7 = 7$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$

poznámka
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$
ak $x \rightarrow 0$

PLATÍ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)} \right)^{f(x)} = e^k$$

pre $f(x) \rightarrow \infty$

(1^∞) neurčitý výřaz

príklad: ① $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x} = (1^\infty) = e$

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{8x} \right)^{8x} = (1^\infty) = e^{-3}$

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{4x-2} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4-3}{3x+4} \right)^{4x-2} =$

vyraz

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{4x} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4-3}{3x+4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{4x-2} \cdot \frac{3x+4}{3x+4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{3x+4} \cdot \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{4x-2-3x-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{3x+4} \cdot \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{-4} = \\ &= e^{-3} \cdot e^{-4} = e^{-7} \end{aligned}$$

neúplný výraz

podľa vzťahu $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a$

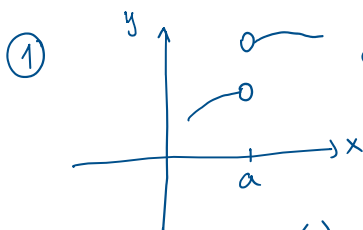
potom 1^∞ je neúplný výraz

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{3x+4} \right)^{4x} = \left(\frac{1}{3} \right)^\infty = 0$$

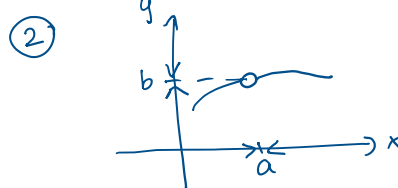
super

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{x+1} \right)^{5x} = 3^\infty = \infty$$

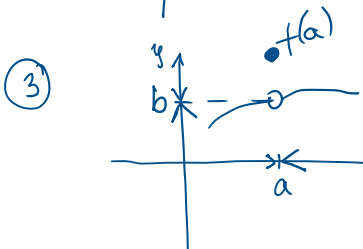
Spojitosť funkcie



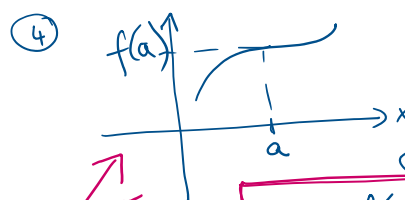
$f(x)$ v bode a nemá limitu $f(a)$ neexistuje



$f(x)$ má v bode a limitu. nie je definovaná v bode a



$f(x)$ má v bode a limitu $f(a)$ existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$



↖ nábresenie jednou čiarou $f(x)$ má limitu v bode a

SPOJITÁ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Definícia

Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f je spojité v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Jednostranná spojitosť:

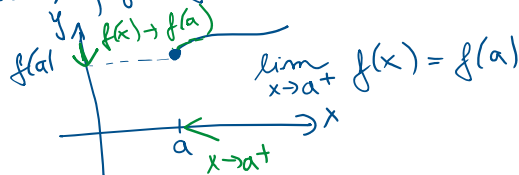
Definícia

Hovoríme, že funkcia f je spojité v bode a sprava, ak $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

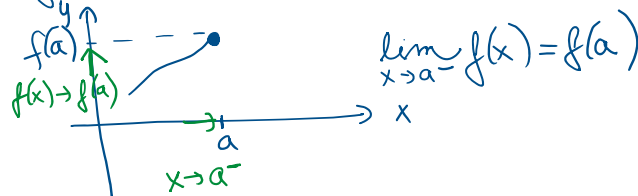
Hovoríme, že funkcia f je spojité v bode a zľava, ak $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Platí: Ak je funkcia v bode a spojité sprava aj zľava, tak je v bode a spojité.

príklad: 1) spojité $f(x)$ sprava v bode a



2) spojité $f(x)$ zľava v bode



SPOJITOSŤ na otvorenom intervale (a,b) :

funkcia je spojité v každom uniformom

SPŮJNOST MA UZAVŘENÝM INTERVALEM

funkcia je spojita v každom vnútornom bode intervalu (a, b) .

$$x \rightarrow a^+$$

SPŮJNOST MA UZAVŘENÝM INTERVALOM $[a, b]$:

funkcia je spojita v každom vnútornom bode intervalu (a, b) a navyše je spojita sprava v bode a a zľava v bode b .

Body nespojitosti funkcie

Definícia

Body, v ktorých nie je funkcia spojita, nazývame body nespojitosti funkcie.

Body nespojitosti môžeme zatriediť do dvoch skupín:

- body nespojitosti 1. druhu - ak existujú konečné jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- body nespojitosti 2. druhu - aspoň jedna z jednostranných limit $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná

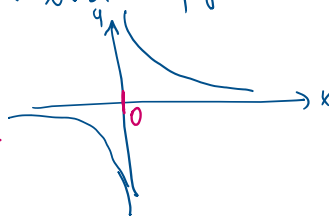
príklad: bod nespojitosti 1. druhu



bod a je bod nespojitosti 1. druhu

príklad: bod nespojitosti 2. druhu

0 je bod nespojitosti 2. druhu.



$$f: y = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\left(\frac{1}{0^+} = \infty \right)$$

$$\left(\frac{1}{0^-} = -\infty \right)$$

Vlastnosti spojitych funkcií

Veta

Nech funkcie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité v bode $a \in A$. Nech $c \in \mathbb{R}$. Potom v bode a sú spojité aj funkcie $f \pm g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ a ak $g(a) \neq 0$ je spojita v bode a aj funkcia $\frac{f}{g}$.

Veta

Nech funkcia g je spojita v bode a a funkcia f je spojita v bode $g(a)$. Potom funkcia $f(g(x))$ je spojita v bode a .

← spojitosť zlozenej funkcie

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow g(a)} f(x) = f(g(a))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(g(a))$$

využijeme pri výpočte limit spojitych funkcií

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(\boxed{g(x)}) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

príklad ① $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

② $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$

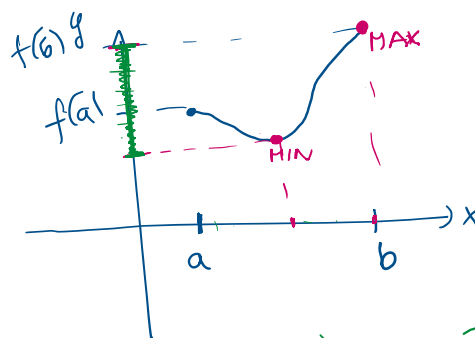
Vlastnosť spojitej funkcie na $[a, b]$.

Veta

Nech funkcia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojita. Potom

- f nadobúda minimum aj maximum,
- f nadobúda aj každú hodnotu medzi minimom a maximom.

funkcia je aj ohraničena



Vlastnosť spojitej funkcie na $[a, b]$. Využitie: pri numerickom (približnom) riešení rovnice $f(x) = 0$.

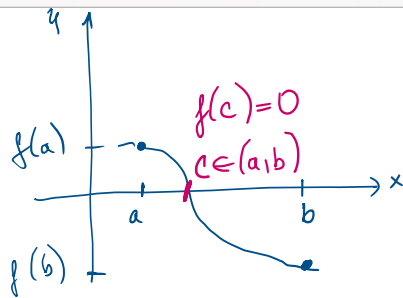
Veta (Bolzanova veta)

Nech funkcia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojita na intervale $[a, b]$ a navyše nech $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký,

c je riešenie rovnice

Veta (Bolzanova veta)

Nech funkcie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervale (a, b) a navyše nech $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $f(c) = 0$.



f je spojitá na (a, b)
 $f(a) \cdot f(b) < 0$
+ -
- +

rovnice

$f(x) = 0$

c je riešenie rovnice

