L'Hospitalovo pravidlo

utorok 27. októbra 2026 8:23

↓ na výpočet niektorých limít pomocou derivácie

VETA Nech 1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

alebo

2. $\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

Ak existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje aj $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\left(\frac{0}{0}\right)$ resp. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ neurčitý výraz

POZNÁMKA: pravidlo platí aj pre jednostranné limity

príklady: ① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ rovnec, resp. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$.

② $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x-5}{3x^3+7} = \frac{2}{3}$, resp. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x-5}{3x^3+7} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+4}{9x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{12x}{18x} = \frac{2}{3} = 1$.

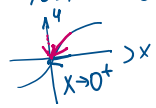
neurčité výrazy: $\infty - \infty$; $0.\infty$; $1^\infty, 0^0, \infty^0$

? môžem použiť L'Hospitala ?

↓ PRIAMO NIE, ALE PO ÚPRAVE NA PODIEL ÁNO.

③ $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \left(\infty - \infty\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - 2x}{2x \cdot \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=}$

$\frac{1}{0^+}$ $\sin 0^+ \to 0^+$



neurčitý výraz, pre ktorý už môžem použiť L'H

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 2}{2\cdot\sin x + 2x\cdot\cos x} = \frac{1-2}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$.

(0+) (0+)

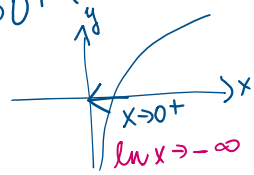
④ $\lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = \left(0.(-\infty)\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} =$

④ $\lim_{x\to 0^+} (x \cdot \ln x) = (0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} =$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$

nevrátený výraz

už môžem použiť LH



$= \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

Z ako zo súčinu vyrobím podiel?

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

⑤ ak mám nevrátené výrazy v tvare mocnín $(1^\infty; 0^0; \infty^0)$

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} =$

$(e^{\ln \heartsuit} = \heartsuit)$

spojitosť $f(x) = e^x$

$= e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)}$ ← ln už podiel vedem vyrobiť

DERIVÁCIE VYŠŠÍCH RÁDOV

Derivácie vyšších rádov

Definícia

Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ má na neprázdnej množine $A_1 \subset A$ deriváciu f'. Ak funkcia f' má na neprázdnej množine $A_2 \subset A$ deriváciu $(f')'$, tak túto funkciu nazývame druhou deriváciou funkcie f na množine A_2 a označujeme ju f'', t.j. $f'' = (f')'$. Podobným spôsobom môžeme definovať derivácie vyšších rádov $n \geq 2$.

Pozn: Označenie s čiarkami používame obyčajne pre derivácie rádu $n \leq 3$, t.j. f', f'', f''', pre $n \geq 4$ používame označenie $f^{(n)}$.

p. $f(x) = \sqrt{x}$; $\mathcal{D}(f) = \langle 0, \infty)$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\mathcal{D}(f') = (0, \infty)$

$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = \left(-\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-\frac{5}{2}} =$

$= \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$

$\vdots$

$f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, ...

$f^4(x)$ → štvrtá mocnina funkcie

štvrtá derivácia funkcie